RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 22 novembre 1903.

P. Villari, Presidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Chimica. — *Sul numero dei componenti indipendenti di un sistema.* Nota del Socio Vito Volterra.

1. Per applicare la *regola delle fasi* è necessario calcolare il numero dei componenti indipendenti e il numero della fasi di un dato sistema.

Per il calcolo del primo numero non ho veduto nei trattati indicata nessuna regola pratica generale. Avendone esposta una semplice nelle mie lezioni mi permetto di porla a cognizione dei chimici, colla speranza di risparmiar loro dei calcoli nei varî casi, talora complicati, che si presentano in pratica.

2. Si abbia un certo numero di corpi di determinata composizione chimica, ciascuno dei quali possa prendersi in quantità arbitraria. Esiste allora un numero che esprime quanti sono gli elementi semplici, componenti i detti corpi, le cui masse possono prendersi arbitrariamente e, determinate le quali, restano definite le masse di tutti gli altri elementi semplici costituenti il sistema.

Il problema che si tratta risolvere è di determinare questo numero che si chiama il *numero dei componenti indipendenti.*

3. Ecco ora la regola che si può applicare.

Denotiamo con P_1, P_2, ... P_n i simboli degli elementi semplici che costituiscono gli m corpi del sistema, e siano

$$\begin{array}{l} P_1^{\alpha'_1}\ P_2^{\alpha'_2} \cdots P_n^{\alpha'_n} \\ P_1^{\alpha''_1}\ P_2^{\alpha''_2} \cdots P_n^{\alpha''_n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ P_1^{\alpha^{(m)}_1}\ P_2^{\alpha^{(m)}_2} \cdots P_n^{\alpha^{(m)}_n} \end{array}$$

le formole chimiche degli m corpi composti.

Supporremo che se un elemento non entra nella composizione di uno dei corpi si prenda eguale a 0 l'esponente corrispondente all'elemento nella formula di quel corpo.

Si costruisca la matrice.

$$\left\| \begin{matrix} \alpha'_1 , \alpha'_2 , \ldots\ldots \alpha'_n \\ \alpha''_1 , \alpha''_2 , \ldots\ldots \alpha''_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha^{(m)}_1 , \alpha^{(m)}_2 , \ldots\ldots \alpha^{(m)}_n \end{matrix} \right\|$$

Se fra i sottodeterminanti di ordine h della matrice ve ne è uno almeno diverso da zero, mentre non si può formare alcun sottodeterminante di ordine superiore ad h, o se possono formarsene sono tutti nulli, h è il numero dei componenti indipendenti del sistema.

In pratica dunque, dopo scritta la matrice, si cominceranno ad estrarre i sottodeterminanti di ordine massimo, se fra questi ve ne è uno almeno diverso da zero, il loro ordine darà il numero dei componenti indipendenti. Se invece sono tutti nulli, si passerà a quelli di ordine inferiore di un'unità. Se fra questi ve ne è uno almeno diverso da zero il loro ordine darà il numero dei componenti indipendenti; ma se sono tutti nulli bisognerà passare a quelli di ordine inferiore, e così di seguito finchè non si giunga ad un primo sottodeterminante diverso da zero: il suo ordine sarà eguale al numero dei componenti indipendenti.

4. Diamo alcuni esempî di applicazione di questa regola.

1) Supponiamo di avere *acqua* e *acido solforico*

FORMULE

Acqua	$H^2O = H^2 S^0 O^1$
Acido solforico	$H^2 SO^4 = H^2 S^1 O^4$

MATRICE

$$\left\| \begin{matrix} 2 , 0 , 1 \\ 2 , 1 , 4 \end{matrix} \right\|$$

I sottodeterminanti di ordine 2 sono differenti da zero, dunque *il numero dei componenti indipendenti è 2.*

2) *Carbonato di calcio, ossido di calcio, anidride carbonica*

FORMULE

Carbonato di calcio	$Ca\,CO^3 = Ca^1 C^1 O^3$
Ossido di calcio	$Ca\,O = Ca^1 C^0 O^1$
Anidride carbonica	$CO^2 = Ca^0 C^1 O^2$

MATRICE

$$\begin{Vmatrix} 1, 1, 3 \\ 1, 0, 1 \\ 0, 1, 2 \end{Vmatrix}$$

Il determinante del terzo ordine è nullo; *i sottodeterminanti del secondo ordine non sono nulli*, dunque *il numero dei componenti indipendenti è 2.*

3) *Acido solforico, mercurio*, *solfato mercurico*, *acqua, anidride solforosa.*

FORMULE

Acido solforico	$H^2 SO^4 = H^2 S^1 O^4 Hg^0$
Mercurio	$Hg = H^0 S^0 O^0 Hg^1$
Solfato mercurico	$Hg SO^4 = H^0 S^1 O^4 Hg^1$
Acqua	$H^2O = H^2 S^0 O^1 Hg^0$
Anidride solforosa	$SO^2 = H^0 S^1 O^2 Hg^0$

MATRICE

$$\begin{Vmatrix} 2, 1, & 4, 0 \\ 0, 0, & 0, 1 \\ 0, 1, & 4, 1 \\ 2, 0, & 1, 0 \\ 0, 1, & 2, 0 \end{Vmatrix}$$

Esistono sottodeterminanti del quarto ordine diversi da zero, dunque *il numero dei componenti indipendenti è 4.*

4) *Nitrato di sodio*, *acido solforico*, *solfato acido di sodio*, *acido nitrico.*

FORMULE

Nitrato di sodio	$Na NO^3 = H^0 Na^1 N^1 O^3 S^0$
Acido solforico	$H^2 SO^4 = H^2 Na^0 N^0 O^4 S^1$
Solfato acido di sodio	$Na HSO^4 = H^1 Na^1 N^0 O^4 S^1$
Acido nitrico	$HNO^3 = H^1 Na^0 N^1 O^3 S^0$

MATRICE

$$\begin{Vmatrix} 0, 1, 1, 3, 0 \\ 2, 0, 0, 4, 1 \\ 1, 1, 0, 4, 1 \\ 1, 0, 1, 3, 0 \end{Vmatrix}$$

Tutti i sottodeterminanti del quarto ordine sono nulli, quelli del terzo no, dunque, *il numero dei componenti indipendenti è 3.*

Chimica. — *Le proprietà colloidali del fluoruro di calcio.* Nota I del Socio E. Paternò e di E. Mazzucchelli [1].

Da lungo tempo sono note agli analitici le difficoltà che presenta la lavatura del $CaFl_2$ ottenuto per via umida, il quale quasi sempre, coll'eliminarsi dei sali solubili in presenza dei quali si è formato, dà sospensioni opalescenti che depongono solo dopo lunghissimo riposo, e che attraversano i migliori filtri o almeno ne ostruiscono completamente i pori. Fenomeni analoghi sono mostrati da altri precipitati che possono in certi casi passare allo stato di soluzioni colloidi; p. es.: idrato di cromo, idrato stannico, idrato ferrico ecc. È quindi ovvia la induzione che anche il $CaFl_2$ sia capace di assumere lo stato colloide; e noi ci siamo posti il problema di ottenerlo in questo stato.

I metodi generali per ottenere soluzioni colloidi di una data sostanza si possono riassumere nei seguenti:

1. Preparare la sostanza in una soluzione in cui non siano presenti elettroliti, o solo elettroliti debolissimi (e ciò per evitare l'azione precipitante di questi).

2. Preparare la sostanza in presenza di elettroliti, ma eliminare questi per lavatura; quando la eliminazione è completa, la sostanza spesso assume bruscamente lo stato colloide, cioè si diffonde pel liquido allo stato di sospensione omogenea.

3. Trattare la sostanza precipitata con un reagente capace di scioglierla, ma in quantità insufficiente ad oprare la dissoluzione completa; se il trattamento si è operato sopra un filtro, accade spesso che lavando successivamente con acqua, tutto il resto della sostanza passa con essa allo stato di soluzione colloide.

4. (Che è una modificazione dei precedenti). Precipitare in opportune condizioni la sostanza, e riprenderla poi, a freddo o all'ebollizione, con acqua pura, in cui si scioglie.

5. Dializzare una soluzione di elettroliti da cui per ragioni diverse la sostanza non precipiti; questo caso si potrebbe dividere in altri due: quello in cui la sostanza colloide non esiste come tale nella soluzione primitiva, ma si forma via via per dissociazione successiva (e questo è forse il caso più generale) e l'altro in cui il colloide preesiste come tale nella soluzione (tipico il caso degli albuminoidi nei liquidi organici).

Per quanto riguarda il primo caso, si è fatto esperienze mescolando soluzione di HFl e acqua di calce in proporzioni equivalenti: si forma per

[1] Presentata nella seduta dell'8 novembre. Una nota preliminare sull'argomento fu stampata nel n. 2 dei Rendiconti della Società chimica di Roma, 18 gennaio 1903.

tal modo solo $CaFl_2$ e acqua; ma il $CaFl_2$ si depone rapidamente, e neppure facendo bollire il liquido si può ottenerlo allo stato di sospensione omogenea.

Quanto al secondo e terzo caso, è appunto ad essi che si riferiscono le osservazioni che han dato occasione al presente lavoro; così il Rose nel suo classico trattato di analisi fa notare che è difficilissimo lavare il $CaFl_2$, precipitato, per decantazione, e impossibile lavarlo sul filtro; ed è per questo che Rose consiglia di precipitarlo insieme a $CaCO_3$, e di separare poi quest'ultimo calcinando il miscuglio e riprendendo il residuo con acido acetico. Il Rose inoltre pose in chiaro la necessità di calcinare il $CaFl_2$, perchè, se ci si contenta di essiccare a bassa temperatura, quando, dopo trattato con acido acetico, si elimina per lavaggio l'acetato, il $CaFl_2$ attraversa il filtro come sospensione opalescente. Questi fenomeni vanno interpretati come una tendenza del $CaFl_2$ ad assumere lo stato colloidale, ma mentre è anche troppo facile ottenere sospensioni di $CaFl_2$, queste sospensioni d'altra parte si ridepongono sempre, con estrema difficoltà sì, ma continuamente, in modo che non si può mai avere un liquido di aspetto omogeneo dall'alto al basso; sembra quindi che non si possa a questo modo ottenere vere soluzioni colloidi di $CaFl_2$.

Se peraltro si mescola la soluzione di un fluoruro con quella di un sale calcico, certe volte non si ha precipitato, ma solo una opalescenza più o meno forte, e in questo stato il liquido si mantiene anche per un tempo assai lungo. Il fatto era già stato accennato in termini generali dal Rose, ma nessuno, a quanto pare, ne aveva fatto oggetto di studî speciali. Per lo più si trova riportato nei trattati che in certe condizioni il $CaFl_2$ si depone così trasparente che difficilmente può vedersi e dà l'illusione di essere ancora sciolto, e forse con questa asserzione tradizionale ci si rendeva conto dei casi in cui non si può conoscere precipitazione mescolando un fluoruro con la soluzione di un sale di calcio; ma per conto nostro noi dobbiamo dire che queste condizioni anche se esistono devono essere abbastanza rare, perchè in tutto il corso delle nostre esperienze non ci è mai capitato il caso di un precipitato trasparente o quasi. Abbiamo invece sin da principio potuto agevolmente verificare dei casi in cui il $CaFl_2$ non precipita affatto, e il liquido in cui esso si forma diviene semplicemente un po' opalescente, e sono appunto stati questi casi che ci hanno messo sulla via per ottenere il $CaFl_2$ colloidale. Se si prepara il $CaFl_2$ per doppia decomposizione, mescolando un sale di calcio, p. es. cloruro, con un fluoruro alcalino, allora può osservarsi che versando il $CaCl_2$ in un eccesso di fluoruro si ha subito intorbidamento, cui segue ben presto la precipitazione, ma se viceversa si fa predominare il $CaCl_2$, il liquido, dapprima intorbidatosi, per agitazione e rimescolamento completo si schiarisce quasi del tutto, mostrando solo una leggera opalescenza, senza la più piccola traccia di precipitato. Molte volte questa apparenza è solo fugace: specialmente in soluzioni concentrate l'intorbidamento ricompare ben presto, e cresce al punto da aversi il noto precipitato gelatinoso, ma col diluirsi delle solu-

zioni il fenomeno ritarda sempre più, e si arriva infine a un punto in cui la opalescenza si mantiene tal quale, o con lievissimo aumento, anche per settimane e mesi. Il fenomeno avviene in condizioni tali che non si può in nessun modo interpretare la opalescenza come dovuta a traccie di $CaFl_2$ formatosi che stenti a raccogliersi in fiocchi e precipitare a causa della grande diluizione, poichè le soluzioni che presentano queste apparenze in modo più caratteristico possono fornire quasi tre grammi di $CaFl_2$ per litro. Esse sono relativamente molto resistenti anche all'azione del calore: un breve riscaldamento non ha effetto, e se si tratta di quantità un po' rilevanti di liquido occorre far bollire molte ore di seguito per vedere raccogliersi allo stato di precipitato tutto il $CaFl_2$ contenutovi; ma quando questo ha finalmente avuto luogo, il liquido, se agitato, mostra una opacità lattiginosa così intensa da risultare evidente che nelle soluzioni opaline, così diverse all'aspetto, il fluoruro non poteva trovarsi allo stato di semplice sospensione meccanica. Soluzioni di questo genere possono aversi trattando il cloruro o nitrato di calcio con circa la metà della quantità equivalente di fluoruro alcalino in una diluizione tale che un grammo atomo di fluoro si trovi sciolto in una quindicina di litri del liquido definitivo. Se allora si sottopone questo liquido, da cui il $CaFl_2$ non precipita, alla dialisi, si trova che in capo a un certo tempo tutti i sali solubili sono eliminati interamente dal liquido interno, ma vi è rimasta la massima parte del fluoruro di calcio, che può aversi così allo stato colloidale. Queste soluzioni contengono dall'1,5 al 2,5 per mille di $CaFl_2$, e possiedono sempre una leggera opalescenza la quale potrebbe far dubitare che si trattasse di una semplice sospensione, e non di una vera soluzione colloide, poichè queste in generale appariscono affatto limpide per trasparenza e solo un po' torbide per riflessione, ma la vera natura ne è posta fuor di di dubbio dal fatto che si può concentrarla notevolmente senza che muti molto l'aspetto. Questa concentrazione non può farsi, come ciò ha luogo per molti altri colloidi, per evaporazione a fiamma diretta o a bagnomaria, perchè dopo un certo tempo tutto il $CaFl_2$ si depone, probabilmente a causa di traccie di elettroliti sempre presenti, e ad evitar ciò non basta neppure eliminare l'azione nociva del calore, concentrando per evaporazione nel vuoto, perchè le soluzioni di fluoruro di calcio colloide presentano la singolarità che il sale contenuto nelli strati vicini alla superficie tende a passare allo stato insolubile in forma di scagliette bianche, e il processo si accelera molto se si rinnuova continuamente essa superficie, facendo gorgogliare aria pel liquido o sbattendolo in una bevuta riempita solo in parte. Confrontisi a questo proposito una recentissima memoria di Ramsden [1]. È appunto per questa ragione che nella dialisi non si ottiene allo stato di soluzione colloide pura altro che una parte, variabile da volta a volta, del $CaFl_2$ primitivamente presente: appunto perchè sempre per evaporazione spontanea si insolubilizza il

[1] Proc. Roy. Soc. London, **72**, 156.

$CaFl_2$ delle parti superficiali del liquido. Quindi per poterne concentrare la soluzione bisogna condurre la evaporazione in modo che la sua superficie libera sia ridotta al minimo, e non sia soggetta a rinnovarsi, onde diminuire più che si può la quantità di $CaFl_2$ che viene insolubilizzata, e questo si ottiene facendo evaporare su H_2SO_4 a pressione ridotta, in un bicchiere alto e stretto, senza agitare: allora si insolubilizza solo il colloide contenuto nelle parti del liquido più prossime alle pareti, e la soluzione può aumentare notevolmente di concentrazione, sebbene, per le ragioni sopra esposte, non in corrispondenza alla diminuzione del volume. Per tal modo se ne può spingere il contenuto in $CaFl_2$ sin verso il 2 per cento. La soluzione così ottenuta non si mantiene indefinitamente, ma dopo un certo tempo finisce col sedimentare, quelle diluite dopo dei mesi e quelle più concentrate in capo ad alcuni giorni; e anche ciò deve attribuirsi a tracce di elettroliti presenti, poichè si osserva che le soluzioni si mantengono tanto più a lungo, quanto più completa è stata la dialisi. Come tutte le soluzioni tipicamente colloidi, essa è precipitata da molti elettroliti, alla cui azione è tanto più sensibile quanto più è concentrata. Così essa viene precipitata rapidamente dagli acidi, e in proporzione della loro energia chimica: dell'acido cloridrico, nitrico, solforico è sufficiente una piccola quantità, è necessario invece un forte eccesso di acido acetico concentrato o di acido borico, mentre l'acido ossalico occupa una posizione intermedia. Viene pure precipitata rapidamente dagli alcali caustici e carbonati, e più lentamente ma pure completamente dall'ammoniaca. Anche i sali neutri hanno un'azione precipitante che è fortissima pei sali dei metalli pesanti, piombo (sopratutto) zinco, rame, un po' minore, ma sempre forte pei sali ammoniacali (cloruro, nitrato, ossalato), minore ancora pei sali alcalini (cloruri, nitrati, clorati in grado circa uguale, maggiormente i fluoruri e in grado sempre crescente i fosfati neutri, i solfati, i ferrocianuri) e assai lenta pei sali dei metalli alcalino-terrosi (calcio, bario, stronzio, magnesio in forma di cloruri o nitrati o solfati) mentre quei sali che come il cloruro di cadmio, il cloruro mercurico, il cianuro di mercurio sono poco o niente elettroliti precipitano solo con estrema lentezza. Corrispondentemente la soluzione colloide di $CaFl_2$ è assai poco sensibile all'azione dei non elettroliti: con alcool metilico, con acetone il suo grado di intorbidamento cresce appena, senza dar luogo ad alcun precipitato neppure dopo un certo tempo, sebbene in queste soluzioni i soliti agenti precipitanti mantengano tutta la loro efficacia, e lo stesso deve dirsi di una soluzione satura di fenolo o di una soluzione di tannino, sebbene questa contenga un colloide (fatto questo che conferma una volta di più la differenza che esiste fra colloidi inorganici ed organici). Particolare menzione merita il comportamento dei sali alcalini ad acido organico: in generale hanno una ben netta ed energica azione precipitante, assai più che i sali di forti acidi inorganici; così li acetati, benzoati, succinati, ma invece i tartrati e citrati non producono da principio che un

debole intorbidamento e ne è necessario un forte eccesso per produrre precipitazione immediata. I sali d'alluminio in piccola quantità producono già intorbidamento e precipitazione, ma se se ne aggiunge un eccesso l'intorbidamento primitivo sparisce e il fluoruro di calcio viene disciolto dall'eccesso del sale aggiunto; ciò si è osservato coll'allume, cloruro e solfato di alluminio; invece i sali di cromo si comportano normalmente: precipitano anche se aggiunti in piccola quantità e un eccesso non ha alcuna azione ulteriore. Tutte queste reazioni naturalmente sono agevolate dal calore e più pronte in soluzione concentrata che in diluita, ma in generale si può osservare che la soluzione di fluoruro di calcio non mostra quella instabilità che hanno certi altri colloidi (p. es. l'allumina) ed è necessaria una quantità relativamente grande dei varî precipitanti per produrre un intorbidamento immediato con successiva precipitazione in fiocchi (per le soluzioni intorno all'uno per cento occorre da $^1/_3$ a due volumi di soluzione normale dei varî reagenti). Dopo i sali aloidi dell'argento il $CaFl_2$ è il primo sale nettamente definito che si riesce ad ottenere allo stato colloidale: il più dei colloidi come l'allumina, l'ossido ferrico, la silice, i metalli nobili, sono sostanze che hanno un debole o nullo carattere chimico, mentre qui abbiamo allo stato colloide il sale di un metallo fortemente elettropositivo e dai caratteri ben definiti come il calcio, ed è interessante notare come questi caratteri non si rivelino per nulla nella soluzione colloide: coll'acido ossalico e colli ossalati precipita come con un qualunque acido o sale alcalino e solo col tempo e coll'ebollizione il fluoruro di calcio precipitato reagisce dando l'ossalato dal caratteristico aspetto. Anche se si fa agire sul $CaFl_2$ colloide l'ossalato potassico molto diluito, in modo da non dare nessun precipitato immediato, il colloide reagisce con esso solo lentamente come se si trattasse di un ordinario precipitato, e si può riconoscere al graduale intorbidarsi con precipitazione finale il lento formarsi di ossalato calcico. Questo modo di comportarsi è assai interessante perchè ci mostra la differenza netta che passa tra lo stato di soluzione ordinaria e la soluzione colloide, onde al vecchio assioma: *Corpora non agunt nisi soluta*, bisognerà mettere una certa restrizione... escludendo dalla categoria le soluzioni colloidali! Ma se ciò prova lo stato di non soluzione del $CaFl_2$, altre delle sopracitate esperienze di precipitazione dimostrano che il suo stato non è una semplice e grossolana sospensione meccanica di particelle tenui. Si sa (H. Rose) che il fluoruro di calcio è un po' solubile negli acidi e nei sali ammoniacali; ebbene, sono appunto essi che anche nelle soluzioni più diluite invece di far sparire, sciogliendola, quella leggera opalescenza che non manca mai, la fanno aumentare al punto di aversi un precipitato fioccoso. Un eccesso, naturalmente, finisce collo sciogliere il precipitato, ma si tratta qua di una azione secondaria.

Il colloide $CaFl_2$ è anche assai interessante perchè è uno dei pochissimi che si formano direttamente in soluzione neutra per la mescolanza di due

elettroliti, il che fra altro darà il modo di preparare colloidi misti, se si scelgono i sali in modo che dalla loro reazione si formi un altro sale insolubile, il quale certe volte potrà essere mantenuto in soluzione dal colloide $CaFl_2$ formatosi contemporaneamente. È un campo questo su cui ci riserviamo ulteriori studi, ma fin da ora vogliamo accennare al comportamento dei sali aloidi dell'Ag. Se si mescola un fluoruro alcalino, contenente una certa quantità di fluoruro argentico, con un eccesso di cloruro calcico, si ha precipitazione di AgCl qualora il sale di argento si trovi in una certa quantità, ma l'AgCl si presenta come polvere finissima, che non si agglomera affatto per agitazione, che si depone molto lentamente, e ha tendenza ad attraversare i filtri: abbiamo qua gli albori, per così dire, dello stato colloidale. Diminuendo la quantità relativa di AgFl, la precipitazione diviene sempre più difficile, e si arriva infine a soluzioni, abbastanza fortemente opaline, da cui l'AgCl non precipita più; lo si può invece far deporre istantaneamente, colla nota apparenza caseosa, mediante uno dei tanti reattivi che producono la precipitazione del $CaFl_2$, al quale evidentemente è dovuto lo stato colloide assunto per simpatia dall'Ag. Analoghi fenomeni si hanno con AgJ. Il fatto acquista un certo interesse dopo che Lottermoser ha tentato invano di avere in soluzione colloide il solo AgCl ([1]). Teniamo a citare questa memoria perchè alcune delle osservazioni in essa contenute trovano un notevole riscontro nella nostra nota. Così anch'egli ha ottenuto AgJ colloide mescolando in soluzione diluita $AgNO_3$ con un eccesso di KJ; inoltre nella serie AgCl, AgBr, AgJ, egli ha potuto ottenere colloide AgJ, che è il più insolubile, e non AgCl, che ha una sia pur debole solubilità, appunto come nella serie omologa dei fluoruri di calcio, stronzio, bario, ha proprietà colloidali quello di Ca, e non ne hanno quelli, un po' più solubili, di Sr e Ba.

Le stesse proprietà, e in particolare la stessa precipitabilità coi reattivi, sono mostrate da quei miscugli di sale calcico e di fluoruro alcalino da cui può ottenersi il colloide in questione. Così essi precipitano subito coi sali di piombo, zinco, rame, cogli acidi, coll'ammoniaca, poi coi sali ammoniacali, coi sali alcalini, e poco o nulla coi cloruri di cadmio e mercurio, mentre i sali ad acido inorganico di calcio, bario, stronzio e magnesio hanno un'azione precipitante molto lenta. Questo loro comportamento ci dà le regole per ottenere più facilmente simili soluzioni opalescenti: lavorare con liquidi neutri ed evitare la presenza di sali di acidi deboli o di metalli pesanti. Anche qua gli acetati hanno un'azione precipitante assai distinta, anche l'acetato di calcio. Inoltre, come dicemmo, le soluzioni in questione precipitano per ebollizione prolungata e il precipitato formato non si scioglie in alcun modo nel liquido soprastante. Tutto questo dimostra già che il rimanere in soluzione del $CaFl_2$ non è dovuto a un ordinario equilibrio reversibile, ma la natura

([1]) Jour. prakt. Chem., (2), 68, 341).

colloide della sua soluzione viene dimostrata nel modo più chiaro da esperienze di dialisi opportunamente condotte. È noto che la incapacità di una sostanza a diffondere attraverso una membrana nell'acqua pura, non è argomento sufficiente per ammettere che questa sostanza nella soluzione in cui esiste abbia lo stato colloide. Può darsi invece che l'acqua pura dissoci e idrolizzi il composto nel quale essa sostanza rimaneva sciolta; ciò è stato dimostrato recentemente dal Kremann pel caso dell'idrato di cromo sciolto nelle liscive alcaline e anzi il Biltz ha basato su questo principio un metodo originale per ottenere gli idrati colloidali dei metalli rari. Perciò anche l'avere ottenuto per dialisi una soluzione colloidale di $CaFl_2$, non basterebbe a dimostrare lo stato primitivamente colloide di questo sale. Ma per maggior sicurezza si è fatto diffondere una di quelle solite soluzioni opaline attraverso carta pergamena in poca acqua distillata senza rinnovarla; si arriva così naturalmente a un punto in cui la composizione del liquido esterno e dell'esterno è precisamente la stessa per quanto riguarda i sali solubili, ma tuttavia il fluoruro di calcio si trova ancora tutto nell'interno della pergamena, senza avere potuto attraversarla, sebbene il liquido esterno perfettamente uguale all'interno non possa causare la idrolisi di una combinazione labile eventualmente presente. Da tutti questi argomenti resta così sufficientemente provata la natura colloide del $CaFl_2$ in tutte le soluzioni da cui non si depone naturalmente; altri ancora vedremo che possono dedursi da misure di conducibilità elettrica.

Non abbiamo potuto ottenere questo colloide in forma di idrosolo solido (per usare la denominazione del Graham). È anche troppo facile (e gli analitici lo sanno) ottenere dei precipitati di $CaFl_2$ che ripresi con acqua danno sospensioni ostinate, ma queste sospensioni sono troppo torbide e si depongono con una rapidità relativamente troppo grande per poter essere considerate come soluzioni colloidi: esse sono importanti solo perchè sono un indizio della tendenza che ha il $CaFl_2$ a dare simili soluzioni. Se la reazione tra un sale calcico con fluoruro si fa aver luogo in soluzione alcoolica allora la lavatura ne riesce più facile, e dopo eliminati completamente i cloruri si ottiene un precipitato gelatinoso che ripreso con acqua si depone solo lentissimamente, ma anche qua la sua opacità è troppo grande perchè si possa parlare di vera soluzione.

Resta ora a risolvere la questione delle ragioni per cui il $CaFl_2$ possa assumere lo stato colloidale. Il Graham dai suoi studî fondamentali sui colloidi dedusse il concetto di azione peptizzante, indicando con questo nome la capacità che hanno certi elettroliti di far passare dei corpi ordinariamente insolubili allo stato idrosolo colloide. Nel caso nostro non v'ha dubbio che l'azione peptizzante spetti ai sali di calcio ad acido forte che è necessario aggiungere per provocare la opalescenza. Fornisce risultati assai istruttivi in questo proposito l'eseguire una serie sistematica di precipitazioni tra $CaCl_2$

e KFl in varie proporzioni e a differenti diluizioni. Si sono eseguite esperienze usando i rapporti $CaCl_2 + 2KFl$; $3CaCl_2 + 4KFl$; $CaCl_2 + KFl$; $3CaCl_2 + 2KFl$, e in concentrazioni tali che un grammoatomo di fluoro si trovasse sciolto in 4,8, ecc. litri di soluzione fino a 128, oppure in 6,12, ecc. sino a 96, sempre progredendo da un dato volume al doppio. Senza stare a riportare tutti quanti i risultati delle numerose osservazioni fatte possiamo dire che in generale usando quantità equivalenti la precipitazione avviene sempre in un intervallo di tempo variabile (a temperatura ordinaria) da poche ore a due o tre giorni. La precipitazione è pronta soprattutto nelle soluzioni concentrate, tocca un minimo intorno a una diluizione di 32 litri, dove occorrono giornate intere, e nelle diluizioni successive torna ad aver luogo con rapidità leggermente decrescente col progredire della diluizione. Adoperando un eccesso di $CaCl_2$ si vede che nelle soluzioni più concentrate la precipitazione è assai rapida, più rapida anzi che dove non c'è eccesso; ma ben presto colla diluizione la precipitazione è ritardata al segno che si hanno delle soluzioni che si mantengono dei giorni e magari delle settimane semplicemente opalescenti senza traccia di precipitato: aumentando ancora la diluizione la opalescenza diviene sempre più forte, tornano a formarsi i precipitati in breve tempo e finalmente il comportamento dei termini estremi si riavvicina a quello delle soluzioni dove non è eccesso di calcio, e la precipitazione ha luogo con rapidità uguale. Questo comportamento generale è proprio a tutte le soluzioni che contengono un eccesso di Ca, ma via via che questo cresce, le soluzioni più diluite vanno assumendo il comportamento che avevano le più concentrate, nel senso che con forte eccesso di $CaCl_2$ precipitano in non lungo tempo anche quelle soluzioni ($v = 8$ a 12 litri) che con un eccesso minore si mantenevano opalescenti per molti giorni, mentre d'altra parte viene ritardata la precipitazione delle più diluite.

Tutto ciò trova la sua spiegazione naturale nella proprietà sopra accennata del cloruro e nitrato di calcio: essi peptizzano e sciolgono il $CaFl_2$, e la loro azione si estende su soluzioni tanto più diluite quanto maggiore è il loro eccesso relativo. Invece nelle soluzioni più concentrate essi manifestano un'azione precipitante probabilmente perchè allora è proppo forte la concentrazione assoluta degli elettroliti (in genere) presenti, mentre nelle soluzioni più diluite l'azione loro peptizzante è talmente indebolita che non si può riconoscere differenza sensibile tra i casi in cui v'e eccesso di $CaCl_2$ e quelli ove manca. Accanto a questa principale vi devono essere poi delle influenze secondarie: ad esempio pare che tutti gli elettroliti, oltre l'azione coagulante in soluzioni concentrate, ne abbiano una leggermente peptizzante in una certa diluizione, perchè è un fatto che comunque si sia ottenuto il $CaFl_2$ per via umida, purchè non in soluzione diluitissima (v. oltre), mostra la tendenza ad andare in sospensione durante la lavatura. E così forse può spiegarsi quella lentezza del precipitare, alle diluizioni verso 32

litri, di miscugli di $CaCl_2 + 2KFl$, dove pure manca l'eccesso di $CaCl_2$ peptizzante.

È poi singolarmente interessante osservare le variazioni di aspetto del precipitato di $CaFl_2$ a seconda delle condizioni in cui esso si forma. Nelle soluzioni più concentrate e ricche di $CaCl_2$, dove precipita giù in due o tre ore, apparisce gelatinoso, vòluminoso, e se ne vien decantato il liquido soprastante e lo si riprende con acqua pura, fornisce subite le note soluzioni opalescenti, che schiariscono prontamente per aggiunta di elettroliti; invece nelle soluzioni diluite e dove l'influenza del Ca è nulla, esso precipita giù polverulento e a parte la sua leggerezza può perfettamente lavarsi per decantazione senza mostrare mai tendenza a dare sospensioni neppure se lo si riprende con soluzioni (peptizzanti) di $CaCl_2$. S'intende che nelle condizioni intermedie esso mostra un comportamento intermedio e perciò meno netto: in generale, ad es., può dirsi che, quando le soluzioni opalescenti finiscono col deporre, il precipitato ha apparenza polverulenta e tendenza a passare in sospensione. Ma limitandoci a considerare quei due casi estremi, è duopo convenire che il comportamento è così differente quale potrebbe aspettarsi da due differenti sostanze. E realmente una differenza essenziale c'è; il fluoruro precipitato in soluzione concentrata ha subito un'azione peptizzante, mentre quello dalle soluzioni diluite non ne ha avuta alcuna: esso rappresenta lo stato che potrebbe dirsi normale del $CaFl_2$, che è per tal modo il vero analogo di $SrFl_2$, di $BaFl_2$, tutti precipitati polverulenti che non danno sospensioni di carattere colloide.

Le stesse differenze cui abbiamo accennato nel caso dei precipitati si ritrovano per le soluzioni opalescenti di fluoruro di calcio: in generale può dirsi che una soluzione opalescente, allungata, diminuisce di opalescenza proporzionalmente alla diluizione: se inizialmente era del tutto torbida resta discretamente opalina: se inizialmente era appena opalina diviene addirittura limpida come l'acqua; cioè il $CaFl_2$ mantiene i caratteri che aveva appena formato. E così può osservarsi il curioso fatto che un miscuglio di cloruro calcico e fluoruro alcalino in soluzione diluitissima (un grammoatomo di fluoro in 80 a 100 litri di soluzione) può presentarsi: 1° come soluzione semplicemente opalina; 2° limpido come l'acqua; 3° completamente torbido, e precipitare in breve tempo, a seconda che è stato preparato diluendo un miscuglio abbastanza concentrato (1°) o mediocremente diluito (2°) o mescolando direttamente i due sali in soluzione diluitissima (3°).

Le proprietà peptizzanti dei sali di calcio spiegano l'insuccesso delle prime prove colle quali si sperava ottenere $CaFl_2$ colloide neutralizzando CaO_2H_2 con HFl, in assenza di altri elettroliti per evitarne l'azione precipitante: invece esso precipitava, appunto per la mancanza di azione peptizzante.

Matematica. — *Il secondo problema di riduzione per le forme differenziali di ordine dispari, e ricerche complementari.* Nota VIII del Corrispondente ERNESTO PASCAL [1].

1. *Soluzione del problema II col metodo delle trasformazioni infinitesime nel caso di r dispari.* — Cominciamo, come nel paragrafo 4 della precedente Nota [2], col formare una trasformazione finita, prendendo a base, nel solito modo, una trasformazione infinitesima Ξ *per la quale sia zero il covariante* $L^{(r)}$.

Dico che se r è dispari, la trasformazione finita così ottenuta riduce $X^{(r)}$ *a*

$$(1)\qquad Y^{(r)} \equiv T^{(r)} + \tfrac{1}{2} \sum_{\rho=1}^{r-1} (-1)^{\rho} \binom{r}{\rho} d^{r-\rho} Z^{(\rho)} - $$

$$- \tfrac{1}{2}\, d \sum_{\rho=1}^{r-2} (-1)^{\rho} \binom{r-1}{\rho} d^{r-1-\rho} Z^{(\rho)}$$

dove $T^{(r)}$ *non contiene* y_n, *e l'altra parte è, come si vede, un differenziale canonico di ordine dispari. E viceversa, se la* $X^{(r)}$ *è riducibile al tipo* (1), *esiste una trasformazione infinitesima* Ξ *per cui è zero il covariante* $L^{(r)}$.

Quindi, come per r pari, anche per r dispari:

Il problema II è risolubile semprechè, e solo allora, che la matrice

$$(2)\qquad (M')_r + \{M'\}_{r-1} + \cdots + (M')_1$$

abbia caratteristica ν minore di n.

E ragionando poi come alla fine del paragrafo 4 della Nota precedente, abbiamo anche qui:

Se la caratteristica di (2) *è ν, la forma* $X^{(r)}$ *può sempre trasformarsi nella somma di una forma con sole ν variabili e di $n-\nu$ differenziali canonici rispettivamente a $n, n-1, n-2, \ldots \nu+1$ variabili.*

Essendo $L^{(r)} = 0$, trasformando la Ξ nella

$$Y = \eta_n \frac{\partial}{\partial y_n}$$

[1] Presentata nella seduta dell'8 novembre 1903.

[2] Questi Rendiconti, (5), t. XII, 1903, 2° sem., pp. 326-336.

si ha, come nel citato paragrafo 4 della Nota precedente, che devono sussistere le

$$
(3) \qquad \left\{ \begin{array}{l} (j_1 \dots j_r\, n)_Y = 0 \\ \}j_1 \dots j_{r-1}\, n\{_Y = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \}j\, n\{_Y = 0 \end{array} \right.
$$

Poniamo ora

$$
(4) \qquad Y_n = Z_n = \frac{\partial f}{\partial y_n}\,.
$$

Dall' ultima delle (3) si ha

$$
\frac{\partial Y_i}{\partial y_n} = \frac{\partial^2 f}{\partial y_i\, \partial y_n}
$$

donde

$$
(5) \qquad Y_i = T_i + \frac{\partial f}{\partial y_i}
$$

in cui T_i non contiene la variabile y_n.

Porremo

$$
(6) \qquad Z_i = \frac{\partial f}{\partial y_i}
$$

e allora

$$
(7) \qquad Y_i = T_i + Z_i
$$

e osserviamo che le Z definite dalle (6) soddisfanno a

$$
(8) \qquad (i\, j)_Z = 0\,.
$$

Poniamo ora

$$
(9) \qquad Y_{ij} = T_{ij} + Z_{ij}
$$

essendo le T delle funzioni indipendenti da y_n, ed essendo zero quelle fra esse di cui uno degli indici sia n; allora da $\}i\, j\, n\{_Y = 0$ deduciamo:

$$
(10) \qquad Y_{ijn} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial Z_{ij}}{\partial y_n} + \frac{\partial Z_{in}}{\partial y_j} + \frac{\partial Z_{jn}}{\partial y_i} - \frac{\partial^3 f}{\partial y_i\, \partial y_j\, \partial y_n} \right\} = Z_{ijn}
$$

che noi porremo eguale a Z_{ijn}, mentre da $(i\, j\, h\, n)_Y = 0$, ricordando la formola (18) della Nota VI, cioè nel nostro caso

$$
(i\, j\, h\, n)_Y = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y_n} \}i\, j\, h\{_Y
$$

valevole quando sono soddisfatte le (3) e la (8), si deduce

$$
\frac{\partial}{\partial y_n} \}i\, j\, h\{_Y = 0\,.
$$

Di qui si ha che $\}i\,j\,h\{_Y$ è eguale ad una quantità indipendente da y_n, e quindi si deduce per Y_{ijh} una formola come la (10), *più* una parte indipendente da y_n.

Poniamo

$$(11) \qquad Z_{ijh} = \tfrac{1}{2}\left\{\frac{\partial Z_{ij}}{\partial y_h} + \frac{\partial Z_{ih}}{\partial y_j} + \frac{\partial Z_{jh}}{\partial y_i} - \frac{\partial^3 f}{\partial y_i\,\partial y_j\,\partial y_h}\right\}$$

che soddisfa a $\}i\,j\,h\{_Z = 0$, e quindi anche a $(i\,j\,h\,k)_Z = 0$, e poniamo inoltre:

$$(12) \qquad Y_{ijh} = T_{ijh} + Z_{ijh}$$

dove T non contenga al solito y_n, e sieno zero le T in cui uno degli indici sia n.

Così seguitando si vede che possiamo procedere come nel paragrafo 4 della Nota precedente, servirci delle considerazioni analoghe a quelle ivi svolte e dei lemmi stabiliti nel paragrafo 2 della Nota VI, e giungere infine al risultato che: *si può porre*

$$Y_{j_1\cdots j_\rho} = T_{j_1\cdots j_\rho} + Z_{j_1\cdots j_\rho}$$

dove le T *non contengano* y_n, *sieno zero quelle in cui uno degli indici sia* n, *e le* Z *soddisfacciano alle*

$$(13) \quad (j_1\,j_2)_Z = 0\,,\ \}j_1\,j_2\,j_3\{_Z = 0\,,\ (j_1\,j_2\,j_3\,j_4)_Z = 0\,,\ \ldots\ (j_1 \ldots j_{r+1})_Z = 0.$$

Mentre nel caso di r pari coi valori delle Z a un numero *dispari* di indici ricaviamo quelli delle altre, qui invece, nel caso di r dispari, è dai valori delle Z ad un numero *pari* di indici che ricaviamo quelli delle altre.

Pei risultati del paragrafo 1 della Nota precedente si ha quindi

$$Z^{(r)} = \tfrac{1}{2}\sum_{\rho=1}^{r-1}(-1)^\rho\binom{r}{\rho}d^{r-\rho}Z^{(\rho)} - \tfrac{1}{2}\,d\sum_{\rho=1}^{r-2}(-1)^\rho\binom{r-1}{\rho}d^{r-1-\rho}Z^{(\rho)}$$

e con ciò resta provato l'assunto.

In quanto poi al teorema reciproco, esso si dimostra seguendo le stesse considerazioni già svolte alla fine della Nota precedente, e che perciò non ripeteremo.

2. *Caso in cui il differenziale canonico sia un differenziale* r^{mo}. — Abbiamo già detto nell'introduzione alla Nota VI, che quando $Z^{(r-1)}$ diventa un differenziale $(r-1)^{mo}$ di una funzione f, i differenziali canonici sia per r pari che per r dispari, diventano il differenziale r^{mo} di f.

Supponiamo più generalmente che $Z^{(s)}$ sia il differenziale s^{mo} di f, ma che lo stesso non si verifichi per le Z a indice superiore. Allora la $Y^{(r)}$ nel

caso di r pari diventa

$$(14)\qquad Y^{(r)} \equiv T^{(r)} - \tfrac{1}{2}\left[\sum_{\rho=1}^{s}(-1)^{\rho}\binom{r}{\rho}\right] d^r f -$$

$$- \tfrac{1}{2} \sum_{\rho=s+1}^{r-1} (-1)^{\rho} \binom{r}{\rho} d^{r-\rho} Z^{(\rho)}$$

mentre nel caso di r dispari essa diventa

$$(15)\qquad Y^{(r)} \equiv T^{(r)} + \tfrac{1}{2}\left[\sum_{\rho=1}^{s}(-1)^{\rho}\binom{r-1}{\rho-1}\right] d^r f +$$

$$+ \tfrac{1}{2} \sum_{\rho=s+1}^{r-1} (-1)^{\rho} \binom{r}{\rho} d^{r-\rho} Z^{(\rho)} - \tfrac{1}{2} d \sum_{\rho=s+1}^{r-2} (-1)^{\rho} \binom{r-1}{\rho} d^{r-1-\rho} Z^{(\rho)}.$$

Esaminiamo ora quali sono le condizioni perchè $Z^{(s)}$ sia un differenziale s^{mo}, senza che $Z^{(s+1)}$ sia un differenziale $(s+1)^{mo}$.

Prima di tutto si può riconoscere che *per r pari, il numero s non può essere che pari*; giacchè se è dispari, si fa vedere che anche $Z^{(s+1)}$ è differenziale $(s+1)^{mo}$. Infatti se r è pari ed s dispari sappiamo che è

$$(16)\qquad \}j_1 \dots j_{s+1}\{_z = 0\,.$$

Ora se poniamo in questo simbolo, ogni $Z_{ij\dots}$ fino a quelle ad s indici eguali alle derivate di 1°, 2°, ... s^{mo} ordine di una f, otteniamo dalla precedente relazione che anche $Z_{j_1\dots j_{s+1}}$ è eguale a

$$\frac{\partial^{s+1} f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_{s+1}}}\,.$$

Similmente *per r dispari, il numero s non può essere che dispari*, e ciò si dimostra nello stesso modo, solo osservando che per r dispari ed s pari sussiste anche la (16).

Ora dico che *condizione necessaria e sufficiente perchè $Z^{(s)}$ risulti un differenziale s^{mo}, è che la trasformazione infinitesima Ξ da cui si è preso le mosse, abbia zero il covariante $C^{(s-1)}$, e quindi anche tutti i $C^{(s-2)}$, $C^{(s-3)}$, ... $C^{(1)}$.*

In effetti, trasformate le variabili x nelle y, e la Ξ in Y, una $C^{(\rho)}$ diventa

$$(17)\qquad C^{(\rho)} = \eta_n \sum_{m=1}^{\rho} \sum_{j} ((n\,, j_1 \dots j_m))_Y\, \delta^{(\rho)}_{j_1\dots j_m}\,.$$

Ora se le $Z_{j_1 \dots j_m}$ $(m = 1, 2, \dots s)$ sono le derivate sino a quelle di ordine s di f, i simboli

$$((i, j_1 \dots j_m))_Z, \quad (m = 1, \dots s - 1)$$

sono tutti zero; ma se facciamo $i \equiv n$ abbiamo evidentemente

$$((n, j_1 \dots j_m))_Z = ((n, j_1 \dots j_m))_Y$$

perchè le Y di cui un indice sia n sono eguali rispettivamente alle Z, dunque nel caso indicato è evidente che $C^{(s-1)} = 0$.

Viceversa se $C^{(s-1)} = 0$, si avranno le equazioni

$$((n, j_1 \dots j_m))_Y = 0 \quad (m = 1, 2 \dots s - 1) \tag{18}$$

e quindi, per quanto si è ora detto:

$$((n, j_1 \dots j_m))_Z = 0 \quad (m = 1, 2, \dots s - 1).$$

Di qui può dedursi che le Z sino a quelle ad s indici sono le derivate di una f.

Per veder ciò basta tener presenti i calcoli eseguiti nel paragrafo 4 della Nota precedente, e nel paragrafo 1 di questa Nota.

Sia r pari. Poniamo, ciò che è sempre lecito,

$$Z_n = \frac{\partial f}{\partial y_n}. \tag{19}$$

Da $((n, i))_Z = 0$ e $\}i\, n\{_Z = 0$ si deduce $(i\, n)_Z = 0$ e allora da (19) si ha

$$Z_i = \frac{\partial f}{\partial y_i} \tag{20}$$

a meno di una parte che, non dovendo dipendere da y_n, la intenderemo inclusa in T_i. Da (20) e dal valore di Z_{ij} già trovato nel paragrafo 4 della Nota VII, deduciamo

$$Z_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial y_i \, \partial y_j}. \tag{21}$$

Da $((n, i\, j))_Z = 0$, si deduce

$$Z_{ijn} = \frac{\partial^3 f}{\partial y_i \, \partial y_j \, \partial y_n} \tag{22}$$

mentre da $((n, i\, j\, h))_Z = 0$ e $\}i\, j\, h\, n\{_Z = 0$ si deduce $(i\, j\, h\, n)_Z = 0$ e quindi, a meno di una parte indipendente da y_n,

$$Z_{ijh} = \frac{\partial^3 f}{\partial y_i \, \partial y_j \, \partial y_h}. \tag{23}$$

Da queste e dalla formola (26) del paragrafo 4 della Nota precedente si deduce che Z_{ijhk} è anch'essa la derivata quarta di f.

Così seguitando e ricordando che s è pari, da $((n, j_1 \dots j_{s-2}))_Z = 0$ si deduce $Z_{nj_1 \dots j_{s-2}}$ come derivata $(s-1)^{ma}$ di f; indi da

$$((n, j_1 \dots j_{s-1}))_Z = 0 \quad \text{e} \quad \}j_1 \dots j_{s-1}\, n\{_Z = 0$$

si deduce

$$(j_1 \dots j_{s-1}\, n)_Z = 0$$

donde, come sopra, il valore di $Z_{j_1 \dots j_{s-1}}$ come derivata $(s-1)^{ma}$ di f; infine da $\}j_1 \dots j_s\{_Z = 0$ si ha il valore di $Z_{j_1 \dots j_s}$ come derivata s^{ma}, e ciò dimostra l'assunto.

Sia ora r dispari, e quindi anche s dispari. Le formole (4) e (6) del paragrafo 1 di questa Nota danno già le Z_i eguali alle derivate prime di f. La $((n, i))_Z = 0$ dà allora $Z_{in} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y_i\, \partial y_n}$, e dalle $((n, i\, j))_Z = 0$ e $\}i\, j\, n\{_Z = 0$ si deduce $(i\, j\, n)_Z = 0$ donde, a meno di una parte indipendente da y_n, $Z_{ij} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y_i\, \partial y_j}$. Da questa e dalla formola (11) resta Z_{ijh} eguale alla derivata terza di f. Così seguitando si procede come sopra, e resta così completamente dimostrato il teorema.

Un caso degno di essere posto in speciale rilievo è quello di $s = r$. In tal caso si ha la trasformazione della forma $X^{(r)}$ in una con una variabile di meno più il differenziale r^{mo} di una funzione, e le condizioni a ciò sono nell'esistenza di una trasformazione infinitesima Ξ per cui sia $L^{(r)} = 0$ a $C^{(r-1)} = 0$, che cioè, applicata a $X^{(r)}$, la riduca al differenziale r^{mo} dell'invariante $\mathcal{A}$.

Raccogliendo abbiamo dunque il seguente risultato:

Condizione necessaria e sufficiente perchè la forma $X^{(r)}$ *si possa trasformare nella somma di una con una variabile di meno, e di un differenziale* r^{mo} *esatto, è che esista una trasformazione infinitesima* Ξ *per cui sieno zero i covarianti* $L^{(r)}$ *e* $C^{(r-1)}$, *e che quindi sia tale che*

$$\Xi X^{(r)} = d^r \mathcal{A},$$

e tutte le trasformazioni finite di tale specie si formano da una Ξ *nel modo più volte indicato* (v. principio del paragrafo 1 della Nota VI).

O anche (vedi paragrafo 5 della Nota VI):

La predetta condizione necessaria e sufficiente è che la matrice

$$\sum_{s=1}^{r-1} [(M')_s + \}M'\{_s] + (M')_r$$

abbia caratteristica minore di n.

E ancora:

Se la caratteristica della predetta matrice è ν, si può sempre trasformare $X^{(r)}$ nella somma di una forma con sole ν variabili, e di $n-\nu$ differenziali r^{mi} esatti rispettivamente a $n, n-1, \ldots \nu+1$ variabili.

3. *Problema di riduzione per le forme differenziali di 1° ordine e r^{mo} grado.* — Per completare la nostra ricerca, trattiamo ora, come già nelle Note precedenti (v. Nota II, § 5; Nota III, § 5; Nota V, § 6) del caso in cui nella $X^{(r)}$ sieno zero tutti i coefficienti con un numero di indici minore di r.

Dei due problemi di riduzione enunciati nella Nota VI, diventa in questo caso impossibile il secondo, almenochè di esso non si voglia considerare un caso degenere, il quale poi a sua volta può considerarsi meglio come caso particolare del primo.

Infatti nel nostro caso le espressioni che abbiamo chiamate *differenziali canonici* non esistono più, *se vogliamo che essi sieno dello stesso tipo della forma fondamentale*; perchè ricordando che le Z mediante cui essi sono costruiti, soddisfanno alle

$$(j_1 \ldots j_{r+1})_Z = 0\,,\ \}j_1 \ldots j_r\{_Z = 0\,, \ldots\ldots$$

ed essendo $Z^{(r)}$ dello stesso tipo della forma fondamentale, cioè essendo zero tutti i suoi coefficienti meno quelli a r indici, delle precedenti equazioni non si possono costruire che solo le due prime, mentre la $\}j_1 \ldots j_r\{_Z = 0$ si riduce a $Z_{j_1 \ldots j_r} = 0$, e quindi la $Z^{(r)}$ svanisce.

D'altra parte il considerare una $Z^{(r)}$ di tipo diverso che la forma fondamentale, sarebbe inutile, perchè con una qualunque trasformazione di variabili, questa conserva il suo tipo, e quindi se deve trasformarsi in $T^{(r)} + Z^{(r)}$, è naturale che ambedue queste nuove forme sieno presupposte, come la primitiva, di 1° ordine e r^{mo} grado.

Passando ora al primo problema di riduzione, basta tener presente quanto abbiamo osservato nel paragrafo 6 della Nota V, che, cioè, per le trasformazioni infinitesime per le quali è $L^{(r)} = \mu X^{(r)}$, è anche $C^{(r-1)} = 0$; ricordando allora il risultato del § 1 della Nota VI, risulta:

Condizione necessaria e sufficiente perchè la forma data di 1° ordine e r^{mo} grado si possa trasformare, a meno di un fattore, in una con una variabile di meno è che la matrice $\}M\{_{r-1} + (M)_r$ abbia caratteristica ν minore di $n+1$. Ciò verificato, si può sempre trasformare la forma nel prodotto di un fattore finito per un'altra forma contenente $\nu - 1$ variabili.

Se poi la forma deve trasformarsi, senza fattore, in una con una variabile di meno, ricordando sempre quanto abbiamo detto al paragrafo 1 della Nota VI, la condizione necessaria e sufficiente a ciò è che la ma-

trice $\{M'\}_{r-1} + (M')_r$ *abbia caratteristica minore di* n, *intendendo al solito con* M' *le matrici* M *prive della prima colonna.*

Secondo quest' ultima riduzione la $X^{(r)}$ si muta in $T^{(r)}$ con una variabile di meno. Ora $T^{(r)}$ può considerarsi sia come caso particolare di $\mu T^{(r)}$ sia come caso particolare di $T^{(r)} + Z^{(r)}$, e quindi l' ultimo risultato ottenuto può anche considerarsi come soluzione di un caso particolare del *secondo* problema di riduzione. Perciò il predetto risultato si accorda con quello che si ricaverebbe dal paragrafo precedente.

Analisi. — *Sulle funzioni meromorfe.* Nota del Socio S. Pincherle [1].

Quando di una funzione meromorfa si conoscono i poli (che per semplicità supponiamo di primo ordine) ed i rispettivi residui, il classico teorema di Mittag-Leffler permette di costruire un'espressione che rappresenta la funzione, a meno di una funzione intera additiva. Ma il problema della determinazione di questa funzione intera per mezzo delle proprietà della funzione meromorfa presenta, in generale, grandi difficoltà; si può dire anzi che non vi siano indicazioni veramente pratiche a questo scopo. Per questa ragione ritengo non inutile di indicare un caso in cui la determinazione della funzione intera additiva si può completamente raggiungere: tanto più che la soluzione si collega in modo interessante col problema della sommazione di una serie divergente.

1. Sia dato un sistema di costanti

(1) $$c_0, c_1, c_2, \ldots c_n, \ldots$$

tali che il massimo limite di $\sqrt[n]{|c_n|}$ non sia infinito.

La serie

(2) $$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

sarà allora convergente in un cerchio di centro $z = 0$ e di cui indicherò con r il raggio, e se la funzione analitica rappresentata dalla serie (2) non ammette la sua circonferenza di convergenza come linea singolare, si potrà continuare analiticamente codesta funzione, e determinare la stella di Mittag-Leffler relativa e che diremo A, entro cui della funzione stessa si ha un ramo regolare e ad un valore; questo ramo verrà indicato con $\varphi(z)$, e per $|z| < r$ la $\varphi(z)$ coincide colla serie (2).

2. Sia ora z un punto interno alla stella A; si congiunga 0 a z mediante una linea regolare l di lunghezza finita e tutta contenuta nell'interno

[1] Presentata nella seduta dell' 8 novembre 1903.

di A, e si consideri l'espressione, dove l'integrazione s'intende estesa lungo quella linea:

(3) $$\int_0^z \varphi(t)\, t^{x-1}\, dt.$$

Per tutti i valori di z interni ad A e per tutti i valori di x la cui parte reale è positiva, questa espressione, quando sia impedito alla linea l (p. es. mediante un taglio da o al contorno della stella), di girare intorno al punto $t=0$, rappresenta una funzione analitica regolare delle due variabili z ed x, indipendente dalla scelta della linea l. Rappresenteremo questa funzione con $\alpha(x, z)$.

Ora, se è $|z| < r$, si può in (3) sostituire alla $\varphi(t)$ il suo sviluppo (2), ed integrare termine a termine, per la convergenza uniforme dello sviluppo lungo la linea d'integrazione che ora può farsi coincidere col segmento rettilineo fra 0 e z; ne viene:

(4) $$\alpha(x, z) = z^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n z^n}{x+n}.$$

Sotto questa forma, si vede come la funzione $\alpha(x, z)$ come funzione di x, non sia definita solo per $R(x) > 0$ [1], ma come essa risulti una funzione meromorfa definita in tutto il piano, coi soli poli del primo ordine nei punti $x = 0, -1, -2, -3, \ldots$ e coi rispettivi residui $c_0, c_1, c_2, \ldots$ purchè il valore di z sia preso interno al cerchio di centro 0 e di raggio r. Ma, per la (3), la funzione $\alpha(x, z)$ si può continuare in tutta la stella A; si tratta ora di vedere se, anche per i punti z di A per i quali sia $|z| \geq r$, la $\alpha(x, z)$ sia ancora una funzione meromorfa in tutto il piano x e quale ne sia l'espressione analitica.

3. Che $\alpha(x, z)$ sia anche nel caso di $|z| \geq r$ funzione meromorfa con soli poli di prim'ordine nei punti $0, -1, -2, \ldots$ e cogli stessi residui $c_0, c_1, c_2, \ldots$, è subito visto. Basta prendere sulla linea l un punto z' tale che sia $|z'| < r$, e spezzare l'integrale (3) in

$$\int_0^{z'} \varphi(t)\, t^{x-1}\, dt + \int_{z'}^{z} \varphi(t)\, t^{x-1}\, dt.$$

Il primo di questi dà luogo ad una espressione (4), il secondo è manifestamente una funzione intera (trascendente in generale) di x.

4. Si tratta ora di trovare l'espressione analitica di questa funzione meromorfa, che la rappresenti in tutto il piano x ed in tutta la stella A.

A questo scopo, si applichi alla funzione meromorfa col polo di prim'ordine nel punto $x = -n$ e col residuo rispettivo $c_n z^n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ il

(1) Con $R(a)$ si intenda « la parte reale di a ».

metodo del teorema classico di Mittag-Leffler; si faccia cioè:

$$\frac{1}{x+n}=\frac{1}{n}-\frac{x}{n^2}+\frac{x^2}{n^3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{n^n}+(-1)^n\frac{x^n}{n^n(x+n)};$$

la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{c_n z^n x^n}{n^n(x+n)} \tag{5}$$

rappresenterà una funzione meromorfa colla proprietà indicata, e la funzione più generale avente la stessa proprietà non ne differirà se non per una funzione intera in x, i cui coefficienti saranno naturalmente funzioni di z. In particolare, si avrà dunque per la funzione $\alpha(x, z)$:

$$\alpha(x, z)=z^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{c_n z^n x^n}{n^n(x+n)}+z^x\gamma(x, z), \tag{6}$$

dove $\gamma(x, z)$ è la funzione intera da determinare. La questione si riduce manifestamente a determinarne i coefficienti come funzioni di z.

A tale effetto, poniamo

$$\gamma(x, z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\varrho_n(z)\,x^{n-1};$$

i coefficienti da determinarsi, $\varrho_n(z)$, si possono rappresentare con

$$(-1)^{n-1}\varrho_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(c)}\frac{\gamma(x, z)\,dx}{x^n},$$

dove l'integrazione è estesa ad una linea chiusa (c) del piano x, circondante il punto $x=0$. Sotto questa forma, si vede che $\varrho_n(z)$ è un ramo di funzione analitica monogena di z, regolare in tutta la stella A: se dunque diamo un modo di determinarla, per i valori $|z|<r$, mediante una relazione analitica ricorrente, questa relazione, per solito principio di conservazione mediante la continuazione analitica, si estenderà di mano in mano in modo da essere valida in tutta la stella A.

Ora si ha per $|z|<r$, dal confronto di (6) con (4):

$$\gamma(x, z)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n z^n\left(\frac{1}{n}-\frac{x}{n^2}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{n^n}\right),$$

o anche:

$$\gamma(x, z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{n-1}\left(\frac{c_n z^n}{n^n}+\frac{c_{n+1}z^{n+1}}{(n+1)^n}+\frac{c_{n+2}z^{n+2}}{(n+2)^n}+\cdots\right).$$

Per $|z| < r$ le $\varrho_n(z)$ sono dunque date dalle serie di potenze convergenti:

$$\varrho_n(z) = \frac{c_n z^n}{n^n} + \frac{c_{n+1} z^{n+1}}{(n+1)^n} + \cdots$$

Ma fra codesti sviluppi e $\varphi(z)$ si hanno manifestamente le relazioni ricorrenti:

$$(7) \qquad \begin{cases} \varrho_1(z) = \int_0^z \left(\frac{\varphi(t)}{t} - \frac{c_0}{t} \right) dt, \\ \varrho_{n+1}(z) = \int_0^z \left(\frac{\varrho_n(t)}{t} - \frac{c_n t^{n-1}}{n^n} \right) dt, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \end{cases}$$

e, per quanto si è osservato, queste relazioni rimangono, mediante la continuazione analitica, valide in tutta la stella. Esse risolvono pertanto il problema che ci siamo proposti, cioè: « la rappresentazione, mediante una « espressione analitica valida in tutto il piano x e in tutta la stella A del « piano z, della funzione $\alpha(x, z)$ che, limitatamente ai valori $R(x) > 0$ è « definita dall' integrale

$$\int_0^z \varphi(t)\, t^{x-1}\, dt,$$

« dove $\varphi(t)$ è una serie di potenze di t convergente in un intorno di $t = 0$ « e continuabile analiticamente in tutta la stella A. Questa espressione è

$$z^{-x} \alpha(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{c_n z^n x^n}{n^n (x+n)} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \varrho_n(z)\, x^{n-1},$$

« dove la seconda sommatoria è una funzione intera trascendente di x, i « cui coefficienti sono determinati dalle relazioni ricorrenti (7) ».

Nel tempo stesso, si può, secondo i noti concetti del Borel, dire che la $\alpha(x, z)$ dà la *somma* della serie (4) nella porzione della stella A esterna al cerchio di convergenza $|z| = r$ della serie stessa.

Patologia vegetale. — *Sopra una malattia infesta alle colture dei funghi mangerecci.* Nota del Corrispondente G. Cuboni e di G. Megliola [1].

Le cave di pozzolana e di tufo così estese e numerose nel suburbio di Roma e nell'Agro Romano, sono, in generale, ambienti molto adatti alla coltura artificiale dei funghi mangerecci (*Agaricus campester* L.) secondo il sistema famoso di Parigi (*Champignon de couche*).

Non sono mancati infatti gli abili coltivatori che, avendo appreso a Parigi il sistema di coltura colà in uso da qualche secolo, hanno tentato, fin da quindici anni fa, d'introdurre in Roma questa nuova coltura.

In generale tale coltivazione ha dato risultati soddisfacenti, e in qualche caso altamente lucrosi, nel primo e talora anche nel secondo anno; ma in seguito, quando la coltura venga continuata nella medesima cava, il reddito diventa man mano minore e finisce col ridursi quasi a zero.

Il coltivatore è allora costretto a mutare la cava, non solo, ma anche a rinnovare totalmente ciò che egli chiama il seme, ossia il *bianco* o micelio del fungo, altrimenti egli corre pericolo di continuare a lavorare in perdita anche nella cava nuova.

Questi insuccessi, per quanto è noto finora, sono prodotti dallo sviluppo di parassiti, ordinariamente funghi, che o direttamente attaccano il micelio dell'*Agaricus campester* o per lo meno contrastano a questo il nutrimento e il normale sviluppo.

Fra questi funghi infesti alla coltura dell'Agarico, di uno abbiamo potuto seguire lo sviluppo ed esaminare gli effetti che produce nelle colture. È questo un ifomicete, già conosciuto ed illustrato da Costantin e Matruchot [2], e da essi indicato col nome di *Monilia fimicola* Cost. et Matr.

Abbiamo avuta l'opportunità di seguire lo sviluppo di tale malattia nelle cave della Villa Venosa in Albano.

La malattia è comparsa nel mese di luglio, sopra una *meule* preparata di recente a perfetta regola d'arte.

Quindici giorni dopo l'immissione del bianco, quando avrebbero dovuto cominciare ad apparire i primi frutti dell'*Agaricus*, sulla superficie della *meule* cominciarono a manifestarsi delle miriadi di piccoli punti bianchi, appena visibili ad occhio nudo. In pochi giorni questi punti bianchi si moltiplicarono in modo straordinario, di guisa che la *meule* presentava l'aspetto ca-

[1] Presentata nella seduta dell'8 novembre 1903.

[2] *Recherches sur le vert de gris, le plâtre et le chanci, maladie du blanc de champignon.* Rev. gén de Botanique, tome VI, (1894), p. 289.

ratteristico della malattia, come l'hanno descritta Costantin e Matruchot, cioè sembrava cosparsa di polvere di gesso; da ciò il nome di *plâtre* con cui i coltivatori francesi indicano la malattia.

Oltre che in superficie i puntini bianchi si riscontrano anche nell' interno della massa del concime, in numero però sempre minore negli strati più centrali.

Tale sviluppo dei puntini bianchi è durato per circa venti giorni alla superficie, e per circa un mese nell' interno della *meule*.

Verso la fine di agosto lo sviluppo dei puntini era cessato e quasi ogni traccia dei medesimi era svanita. Però la massa del concime formante la *meule* era rimasta come disseccata, arida e non appariva sopra di essa nessuna traccia dei funghi buoni mangerecci.

Anche dopo un leggiero innaffiamento la *meule* è rimasta improduttiva, e solamente circa un mese dopo, alla fine di settembre, sono cominciati ad apparire i primi funghi mangerecci, ma esili, mingherlini ed in piccolo numero.

La *meule* ha continuato a produrre sino alla fine di ottobre, ma con reddito assai magro e deficiente, sia per la quantità che per la qualità. Il risultato è stato questo che, mentre nella stessa grotta l'anno innanzi la coltura, nelle stesse condizioni di tempo e di spazio, ma esente dalla malattia, aveva dato una produzione di sette chili per metro di ottimi funghi, quest'anno, in seguito alla malattia, la produzione è arrivata appena a due chili per metro e i funghi non sono stati di buona qualità.

L'esame microscopico dei punti bianchi ha mostrato che questi erano costituiti dagli acervoli conidiali del fungo descritto e figurato da Costantin e Matruchot sotto il nome di *Monilia fimicola*.

Per quanto il genere *Monilia*, come osservano gli autori francesi sopra nominati, sia finora assai mal definito, tuttavia a noi sembra che la specie che è causa del *plâtre* debba iscriversi al genere *Oospora*. Infatti per la disposizione delle ife, limitata alla superficie del substrato, e sopratutto per la dimensione dei conidi, che sono piccolissimi, questa specie è molto lontana dalle Monilie tipiche ben conosciute e studiate, sopratutto per opera del Woronin, parassite dei frutti, come la *Monilia candida*, la *fructigena*, la *cinerea* ecc.

Proponiamo pertanto di dare alla specie in questione il nome di *Oospora fimicola* (Cost. et Matr.).

La diagnosi di questa specie, che finora non figura nella *Sylloge Fungorum omnium* di Saccardo, è la seguente:

Mycelio effuso, albo, crustaceo-caespitoso; hyphis sterilibus repentibus 3,5-4 μ *crassis, hyalinis, septatis, ramulosque fertiles producentibus* 2-2,5 μ *cr.; conidis globosis* 5-6,5 μ *diam. hyalinis, longe catenulatis, denique secedentibus.*

L'*Oospora fimicola* si ottiene in coltura pura con grande facilità nella gelatina di carne con agar e sulle patate. Sopra queste ultime alla temperatura dell'ambiente (15-20°) in tre o quattro giorni si ottengono colonie rigogliose, dall'aspetto di masse pulverulenti candide.

Si può facilmente seguire lo sviluppo dell'*Oospora* facendo germinare alcune spore in goccia pendente, con gelatina di carne. Alla temperatura di circa 20° C. l'inizio della germinazione della spora ha luogo dopo tre o quattro ore. Si vede allora una piccola sporgenza, ordinariamente limitata a un sol punto della spora. Tale sporgenza è l'inizio del tubo di micelio. Questo si allunga rapidamente, in dieci ore misura fino 150-160 μ. Esso è diviso da setti trasversali, e man mano che si allunga dà origine a dei rami secondarî, i quali però rimangono sempre molto corti.

Ad un certo momento all'estremità dei rami secondarî si vede apparire una massa splendente, separata dal resto da un setto ben distinto, questa arrotondisce e diventa il primo conidio; man mano al di sotto si vengono sviluppando allo stesso modo altri conidi per formazione centripeta.

Si vanno così formando all'estremità dei rami delle lunghe catene, le quali contano fino 30-40 conidi. Nelle colture conservate al riparo delle correnti d'aria e degli urti, la catena dei conidi si allunga notevolmente, incurvandosi su sè stessa senza spezzarsi.

Le nostre esperienze di colture dell'*Oospora* nei substrati più svariati, e nelle condizioni le più diverse (varia temperatura, alla luce, al buio, al secco, all'umido) non hanno data mai altra forma di riproduzione, se non quella conidiale sopra descritta. Finora non siamo riusciti ad ottenere neppure un accenno di formazione di clamidospore.

In qual modo la *Oospora fimicola* riesce dannosa allo sviluppo del fungo mangereccio? È dessa un vero parassita del micelio dell'*Agaricus campester*?

Questa questione è lasciata indecisa nel lavoro sopra citato dei sigg. Costantin e Matruchot. A noi sembra di poter asserire che l'*Oospora* non è parassita del micelio dell'Agarico, ma che vive soltanto saprofiticamente sul concime, e riesce dannosa all'Agarico perchè sottrae a questo le sostanze alimentari.

Questa nostra opinione è basata sul fatto che, per quante ricerche siano da noi state fatte, non abbiamo mai potuto riscontrare alcun rapporto diretto del micelio dell'Oospora col micelio dell'Agarico. L'attitudine dell'*Oospora* a vivere saprofiticamente è poi dimostrata dalle rigogliose colture che si ottengono sulle fette di patate.

Dalle osservazioni fatte nella coltura delle cave della villa Venosa risulta che la qualità del concime non è priva d'influenza sullo sviluppo dell'*Oospora fimicola*. Infatti sopra due *meule* preparate contemporaneamente e nelle stesse condizioni, ma formate l'una con concime di cavalli di lusso,

e perciò ricco di molta paglia, e l'altra con concime di cavalli da lavoro, scarso di paglia, si è verificato questo fatto che l'*Oospora* nel secondo concime si è sviluppata quindici giorni prima ed assai più abbondantemente che sul concime dei cavalli di lusso. Disgraziatamente la constatazione di questo fatto non ha una grande importanza nella pratica; giacchè, se il concime dei cavalli di lusso si mostra più refrattario alla malattia, lo stesso concime è però meno adatto alla coltura dei funghi mangerecci perchè, come è noto, è assai meno redditivo del concime di cavallo ordinario.

Da tutte le osservazioni ed esperienze da noi fatte risulta che l'*Oospora fimicola* si riproduce con grande facilità e quindi è assai contagiosa.

Ai coltivatori non sapremmo, per ora, suggerire altro modo di combattere la malattia, se non quello di asportare il più sollecitamente e accuratamente possibile dalla cava il materiale infetto.

Ci proponiamo di continuare le nostre esperienze per ricercare un mezzo efficace di disinfezione, che valga a distruggere i germi della malattia in una cava infetta.

Matematica. — *Sull'inversione degl'integrali definiti.* Nota I del dott. Pietro Burgatti, presentata dal Socio V. Cerruti [1].

È noto che il problema dell'inversione degl'integrali definiti nel campo reale, inaugurato da Abel a proposito d'una questione particolare di meccanica, è stato risoluto in questi ultimi anni dal prof. Volterra [2]. Le formule di risoluzione date dall'illustre Autore convengono a casi assai generali; ma le dimostrazioni che ne dà, per quanto eleganti, si riducono in sostanza a verificazioni più o meno dirette. Mi è sembrato perciò interessante la conoscenza di un metodo atto a guidare la mente nella ricerca di tali formule, e ad illuminarla in ricerche più generali. Quello che io espongo in questo scritto è assai semplice e intuitivo, ed è valido non solo nei casi considerati dal prof. Volterra, ma in altri ancora; quando, cioè, si renda più generale il problema dell'inversione, il che può farsi in varie maniere.

Tutto il ragionamento che conduce alle formule di risoluzione è fondato sulla considerazione di certe funzioni che io chiamo *ausiliarie*, e sull'applicazione di un procedimento ben noto, chiamato *delle approssimazioni successive*, usato già con successo in altre questioni. Il problema dell'inversione, esteso in un certo senso (e, come ho detto, si può estendere in varie maniere), può enunciarsi così:

Data l'equazione

$$\varphi(y) = \int_0^y \{\psi_0(x,y)\, f^{(n)}(x) + \psi_1(x,y)\, f^{(n-1)}(x) + \cdots + \psi_n(x,y)\, f(x)\}\, dx,$$

(1) Presentata nella seduta dell'8 novembre 1903.

(2) Atti della R. Acc. di Torino, 1896; Rend. R. Acc. Lincei, 1896.

in cui le funzioni φ *e* ψ_s *sono note, determinare tutte le funzioni* $f(x)$ *che la soddisfanno.* È chiaro che il problema sarebbe più facile, se la funzione da determinare dipendesse dalle due variabili x e y; perchè tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$\psi_0(x,y)\frac{\partial^n F}{\partial x^n}+\psi_1(x,y)\frac{\partial^{n-1}F}{\partial x^{n-1}}+\cdots+\psi_n(x,y)=\varphi'(x),$$

supposto $\varphi(0)=0$, risolverebbero il problema. Orbene, sono precisamente queste funzioni che io chiamo *ausiliarie*; perchè la loro considerazione è molto utile per l'applicazione del metodo delle approssimazioni successive.

Io mi limito qui a considerare i casi in cui $n=0$ e $n=1$, perchè danno luogo a risultati più concreti e precisi. Lo studio degli altri casi richiede la conoscenza di certe proprietà degli integrali dell'equazioni differenziali, che io non ho ancora indagate.

1. Il caso particolare di Abel fu trattato da parecchi autori in varie maniere. Tuttavia mi è sembrato interessante di considerarlo a parte, perchè coll'aiuto delle funzioni ausiliarie, dianzi definite, si risolve con un tratto di penna. Infatti, abbiasi a determinare $f(x)$ in guisa che sia

$$\varphi(a)=\int_0^a\frac{f(x)\,dx}{(a-x)^n},\tag{1}$$

essendo $\varphi(a)$ nota e n un numero positivo minore dell'unità.

Supponendo per ora $\varphi(0)=0$, la funzione ausiliaria è data evidentemente dall'espressione

$$F(a,x)=\varphi'(x)\,(a-x)^n.$$

Per dedurre da essa una funzione della sola x che pur soddisfaccia alla (1), basta osservare che in generale

$$\int_0^x F(x,y)\,\psi(x,y)\,dy$$

è funzione della sola x; onde se poniamo nella (1) questa espressione al posto di $f(x)$, e invertiamo l'ordine delle integrazioni, avremo

$$\varphi(a)=\int_0^a dy\int_y^a\frac{F(x,y)\,\psi(x,y)}{(a-x)^n}\,dx=\int_0^a\varphi'(y)\,dy\int_y^a\frac{(x-y)^n}{(a-x)^n}\psi(x,y)dx;$$

talchè, se si potrà determinare ψ in guisa che risulti

$$\int_y^a\left(\frac{x-y}{a-x}\right)^n\psi(x,y)\,dx=1,$$

la (1) resterà soddisfatta. Ma ricordando che

$$(0) \qquad \int_y^a \frac{dx}{(a-x)^n (x-y)^{1-n}} = \frac{\pi}{\operatorname{sen} n\pi},$$

si vede subito che si dovrà prendere

$$\psi(x,y) = \frac{\operatorname{sen} n\pi}{\pi(x-y)}.$$

Dunque, per le cose dette, la formula d'inversione è

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} n\pi}{\pi} \int_0^x \frac{\varphi'(y)}{(x-y)^{1-n}}\, dy.$$

Riguardo al caso di $\varphi(0) \neq 0$, basta osservare che la funzione ora trovata, che per distinguerla sarà indicata con $f_1(x)$, soddisfa anche l'equazione

$$\varphi(a) - \varphi(0) = \int_0^a \frac{f_1(x)\, dx}{(a-x)^n};$$

per conseguenza sarà

$$\varphi(a) = \int_0^a \frac{f_1(x)\, dx}{(a-x)^n} + \varphi(0),$$

ossia per la (0) (posto $y=0$)

$$\varphi(a) = \int_0^a \frac{f_1(x) + \dfrac{\varphi(0) \operatorname{sen} n\pi}{\pi x^{1-n}}}{(a-x)^n}\, dx.$$

Dunque la (1), nel caso generale, è soddisfatta da

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} n\pi}{\pi} \frac{\varphi(0)}{x^{1-n}} + \frac{\operatorname{sen} n\pi}{\pi} \int_0^x \frac{\varphi'(y)}{(x-y)^{1-n}}\, dy.$$

2. Consideriamo ora l'equazione funzionale

$$(2) \qquad \varphi(y) = \int_0^y f(x).\psi(x,y)\, dx, \qquad (\varphi(0) = 0)$$

in cui $\varphi(y)$, $\varphi'(y)$, $\psi(x,y)$ e $\dfrac{\partial\psi}{\partial y} = \psi_2(x,y)$ si suppongono finite e continue per valori di x e y compresi nell'intervallo $|0, \alpha|$, e $\psi(x,x)$ diversa da zero nello stesso intervallo. In questo caso la funzione ausiliaria di due variabili è evidentemente

$$\mathrm{F}(x,y) = \frac{\varphi'(x)}{\psi(x,y)}.$$

Di qui possiamo dedurre una funzione della sola x ponendo $y=x$; ma non soddisferà la (2); per cui porremo

$$f(x)=Z_0(x)+f_1(x),$$

ove

$$Z_0(x)=\frac{\varphi'(x)}{\psi(x,x)},$$

e cercheremo di determinare la $f_1(x)$. Sostituendo in (2), si ottiene

$$\varphi(y)-\int_0^y Z_0(x)\,\psi(x,y)\,dx=\int_0^y f_1(x)\,\psi(x,y)\,dx,$$

ossia

$$\varphi_1(y)=\int_0^y f_1(x)\,\psi(x,y)\,dx, \tag{2'}$$

ove $\varphi_1(y)$ sta a rappresentare il 1° membro tutto noto. Ma questa equazione è della stessa forma della (2), e $\varphi_1(0)=0$; dunque possiamo per essa ripetere il ragionamento ora fatto. La funzione ausiliaria è

$$F_1(x,y)=\frac{\varphi_1'(x)}{\psi(x,y)};$$

onde noi porremo, come sopra,

$$f_1(x)=Z_1(x)+f_2(x) \quad \text{con} \quad Z_1(x)=\frac{\varphi_1'(x)}{\psi(x,x)}.$$

Ma dall'espressione di $\varphi_1(y)$ si trae

$$\varphi_1'(x)=\left(\varphi'(x)-\left|\int_0^y Z_0(x)\frac{\partial\psi}{\partial y}\,dx\right|_{y=x}-Z_0(x)\,\psi(x,x)\right)=$$
$$=-\int_0^x Z_0(\xi)\,\psi_2(\xi,x)\,d\xi;$$

per conseguenza sarà

$$Z_1(x)=-\frac{1}{\psi(x,x)}\int_0^x Z_0(\xi)\,\psi_2(\xi,x)\,d\xi.$$

Sostituendo ora nella (2′) l'espressione di $f_1(x)$, si ottiene per $f_2(x)$ una equazione come la (2); sulla quale ripetendo lo stesso ragionamento, e seguitando poi oltre quante volte si voglia, si trova

$$f(x)=Z_0+Z_1+\cdots+Z_n+f_{n+1}(x),$$

ove

$$Z_0(x)=\frac{\varphi'(x)}{\psi(x,x)}\ ;\ Z_n(x)=-\frac{1}{\psi(x,x)}\int_0^x Z_{n-1}(\xi)\,\psi_2(\xi,x)\,d\xi \tag{3}$$

$$(n=1,2,3\ldots)$$

e $f_{n+1}(x)$ soddisfa un'equazione come la (2).

Orbene è facile mostrare che, facendo crescere n indefinitamente, la serie

$$Z_0 + Z_1 + \cdots + Z_n + \cdots\cdots$$

è convergente in ugual grado nell' intervallo $|0, \alpha|$, e rappresenta la $f(x)$ che risolve l'equazione (2). Infatti, sia in detto intervallo

$$|\varphi'(x)| < L, |\psi_2(\xi, x)| < L_1, |\psi(x, x)| > l.$$

Allora

$$|Z_0| \leq \frac{L}{l}, |Z_1| \leq \frac{L}{l}\frac{L_1}{l}|x|,$$

$$|Z_2| \leq \frac{L}{l}\frac{L_1}{l}\left|\frac{1}{\psi(x, x)}\int_0^x \xi\psi_2(\xi, x)\, d\xi\right| \leq \frac{L}{l}\left(\frac{L_1}{l}\right)^2 \frac{|x|^2}{\underline{|2}},$$

e in generale

$$|Z_n| \leq \frac{L}{l}\left(\frac{L_1}{l}\right)^n \frac{|x|^n}{\underline{|n}};$$

il che dimostra il primo asserto. Dopo ciò il secondo asserto è dimostrato dal procedimento stesso, che ha servito al calcolo dei successivi termini della serie. Tuttavia, se lo si vuol provare direttamente, basta derivare la (2) rispetto a y e porre $f(x) = \sum_0^\infty Z_n(x)$. Si ottiene infatti

$$\frac{\varphi'(y)}{\psi(y, y)} - \frac{1}{\psi(y, y)}\int_0^y f(x)\, \psi_2(x, y)\, dx = f(y),$$

ossia

$$Z_0(y) - \sum_0^\infty \frac{1}{\psi(y, y)}\int_0^y Z_n(x)\, \psi_2(x, y)\, dx = \sum_0^\infty Z_n(y);$$

quindi per la (3)

$$Z_0(y) + \sum_1^\infty Z_n(y) = \sum_0^\infty Z_n(y).$$

Quanto all'esistenza di questa sola soluzione è inutile tenerne parola: il lettore può vedere la prima Nota citata del prof. Volterra.

Noi abbiamo supposto $\varphi(0) = 0$. Se è $\varphi(0) \neq 0$, l'espressione trovata per $f(x)$ soddisfa, come è chiaro, l'equazione

$$\varphi(y) - \varphi(0) = \int_0^y f(x)\, \psi(x, y)\, dx;$$

ma non più la (2), la quale evidentemente non ammette alcuna soluzione in tal caso. Ciò dipende dalle condizioni imposte alla $\psi(x, y)$, tolte le quali la soluzione può esistere; e noi abbiamo visto che per l'equazione di Abel realmente esiste.

3. Supponiamo ora che la funzione $\psi(x,y)$ diventi infinita per $y=x$ di ordine inferiore all'unità. La scriveremo sotto la forma

$$\frac{\psi(x,y)}{(y-x)^n} \qquad (n<1),$$

ove ψ rappresenta adesso una funzione finita che soddisfa a tutte le condizioni ammesse al n. 2; talchè l'equazione da risolvere sarà

$$\varphi(y)=\int_0^y f(x)\frac{\psi(x,y)}{(y-x)^n}dx \text{ [1]}, \tag{4}$$

supponendo per ora $\varphi(0)=0$.

Il procedimento spiegato nel n. 2 è valido anche per questa equazione; ma qui non possiamo partire dalla funzione ausiliaria

$$F(x,y)=\frac{\varphi'(x)(y-x)^n}{\psi(x,y)};$$

perchè essa si annulla per $y=x$. Occorre quindi considerare un'altra funzione ausiliaria; la quale esiste, ed è espressa dalla formula

$$F(x,y)=\frac{\operatorname{sen} n\pi}{\pi}\frac{1}{\psi(x,y)}\int_0^x\frac{\varphi'(\xi)}{(x-\xi)^{1-n}}d\xi=\frac{P(x)}{\psi(x,y)}.$$

Infatti

$$\int_0^y F(x,y)\frac{\psi(x,y)}{(y-x)^n}dx=\frac{\operatorname{sen} n\pi}{\pi}\int_0^y\frac{dx}{(y-x)^n}\int_0^x\frac{\varphi'(\xi)}{(x-\xi)^{1-n}}d\xi=$$

$$=\frac{\operatorname{sen} n\pi}{\pi}\int_0^y\varphi'(\xi)\,d\xi\int_\xi^y\frac{dx}{(y-x)^n(x-\xi)^{1-n}}=\varphi(y)$$

in virtù della formula (0). Tale funzione non s'annulla per $y=x$; inoltre

$$P(x)=\frac{\operatorname{sen} n\pi}{\pi}\int_0^x\frac{\varphi'(\xi)}{(x-\xi)^{1-n}}d\xi$$

è una funzione finita e continua nell'intervallo considerato; essa è dunque adatta al nostro scopo.

Analogamente a quanto abbiamo fatto nel n. 2, assumeremo, per dir così, come primo valore approssimato di $f(x)$ l'espressione che si ottiene dalla funzione ausiliaria facendo $y=x$, cioè

$$Z_0(x)=\frac{P(x)}{\psi(x,x)};$$

e porremo

$$f(x)=Z_0(x)+f_1(x).$$

[1] Il prof. Volterra ha dimostrato che questo caso si può ricondurre al precedente. Io ho voluto qui trattarlo direttamente per mostrare la generalità del metodo.

La (4) diventa

$$\varphi(y) - \int_0^y \frac{Z_0(x)\,\psi(x,y)}{(y-x)^n}\,dx = \int_0^y \frac{f_1(x)\,\psi(x,y)}{(y-x)^n}\,dx\,,$$

che potremo scrivere sotto la forma

$$\varphi_1(y) = \int_0^y \frac{f_1(x)\,\psi(x,y)}{(y-x)^n}\,dx\,,$$

essendo il primo membro tutto noto e nullo per $y=0$. Abbiamo così una equazione analoga alla (4). Per essa la funzione ausiliaria è

$$F_1(x,y) = \frac{P_1(x)}{\psi(x,y)}\,,$$

in cui

$$P_1(x) = \frac{\operatorname{sen} n\pi}{\pi} \int_0^x \frac{\varphi_1'(\xi)}{(x-\xi)^{1-n}}\,d\xi\,;$$

onde, ragionando come precedentemente, porremo

$$f_1(x) = Z_1(x) + f_2(x)\,,$$

in cui

$$Z_1(x) = \frac{P_1(x)}{\psi(x,x)}\,.$$

Per calcolare $P_1(x)$ conviene procedere nel modo seguente. Moltiplichiamo la relazione

$$\varphi_1(y) = \varphi(y) - \int_0^y \frac{Z_0(\eta)\,\psi(\eta,y)}{(y-\eta)^n}\,d\eta$$

per $\dfrac{dy}{(x-y)^{1-n}}$ e integriamo da 0 a x. Invertendo l'ordine d'integrazione nell'integral doppio, si ottiene

$$\int_0^x \frac{\varphi_1(y)}{(x-y)^{1-n}}\,dy = \int_0^x \frac{\varphi(y)}{(x-y)^{1-n}}\,dy -$$
$$- \int_0^x Z_0(\eta)\,d\eta \int_\eta^x \frac{\psi(\eta,y)}{(x-y)^{1-n}(y-\eta)^n}\,dy\,.$$

Poniamo ora

$$(c) \qquad \int_\eta^x \frac{\psi(\eta,y)}{(x-y)^{1-n}(y-\eta)^n}\,dy = K(\eta,x)\,,$$

e integriamo per parti l'integrale del primo membro e l'analogo del secondo. Si trova subito

$$\frac{1}{n}\int_0^x \varphi_1'(y)\,(x-y)^n\,dy = \frac{1}{n}\int_0^x \varphi'(y)\,(x-y)^n\,dy - \int_0^x Z_0(\eta)\,K(\eta,x)\,d\eta\,;$$

talchè potremo derivare ambo i membri rispetto ad x colla regola ordinaria. Così facendo, si ottiene

$$(d) \qquad P_1(x) = P(x) - \frac{\operatorname{sen} n\pi}{\pi} Z_0(x)\, K(x, x) - \frac{\operatorname{sen} n\pi}{\pi} \int_0^x Z_0(\eta) \frac{\partial K}{\partial x} d\eta .$$

Con un opportuno cambiamento di variabili la (c) diventa

$$K(\eta, x) = \int_0^1 \psi(\eta, \eta + y'(x-\eta)) \frac{dy'}{y'^n(1-y')^{1-n}} ;$$

per conseguenza

$$K(x, x) = \psi(x, x) \frac{\pi}{\operatorname{sen} n\pi}$$

e

$$\frac{\partial K}{\partial x} = \int_0^1 \psi_2(\eta, \eta + y'(x-\eta)) \left(\frac{y'}{1-y'}\right)^{1-n} dy' =$$

$$= \int_\eta^x \psi_2(\eta, y) \left(\frac{y-\eta}{x-y}\right)^{1-n} \frac{dy}{x-\eta} .$$

Con queste espressioni di $K(x, x)$ e $\dfrac{\partial K}{\partial x}$ la (d) diventa

$$P_1(x) = -\frac{\operatorname{sen} n\pi}{\pi} \int_0^x Z_0(\eta) \frac{\partial K}{\partial x} d\eta .$$

Se dunque poniamo $\dfrac{\partial K}{\partial x} = H(\eta, x)$, e mutiamo η in ξ, avremo

$$Z_1(x) = -\frac{\operatorname{sen} n\pi}{\pi \cdot \psi(x, x)} \int_0^x Z_0(\xi)\, H(\xi, x)\, d\xi ,$$

in cui

$$(5) \qquad H(\xi, x) = \int_\xi^x \psi_2(\xi, y) \left(\frac{y-\xi}{x-y}\right)^{1-n} \frac{dy}{x-\xi} .$$

Ripetendo ora lo stesso ragionamento quante volte si voglia, si trova

$$f(x) = Z_0(x) + Z_1(x) + \cdots + Z_m(x) + f_{m+1}(x),$$

in cui

$$(6) \qquad Z_m(x) = -\frac{\operatorname{sen} n\pi}{\pi \psi(x, x)} \int_0^x Z_{m-1}(\xi)\, H(\xi, x)\, d\xi$$

e $f_{m+1}(x)$ soddisfa ad una equazione come la (4). Orbene, la serie

$$Z_0(x) + Z_1(x) + \cdots + Z_m(x) + \cdots$$

è convergente in ugual grado nell' intervallo $|0, \alpha|$ e rappresenta la funzione $f(x)$ che soddisfa l' equazione proposta. Per la dimostrazione della convergenza poco o nulla di sostanziale c' è da mutare in quella esposta al n. 2;

perciò non val la pena di ripeterla. Che poi soddisfaccia la (4) risulta dal procedimento stesso. Tuttavia, volendo, si può dimostrare anche direttamente. Basta prima sottoporre la (4) alle successive trasformazioni che si son fatte per il calcolo di $P_1(x)$, e poi sostituire ad $f(x)$ la serie, tenendo conto della formula (6).

4. Nel caso che sia $\varphi(0) \neq 0$, l'espressione trovata per $f(x)$ soddisfa l'equazione

$$\varphi(y) - \varphi(0) = \int_0^y \frac{f(x)\,\psi(x,y)}{(y-x)^n}\,dx\,;$$

ma non più la (4). Bisogna dunque considerare a parte questo caso.

La funzione ausiliaria usata nel n. 3 non gode più della proprietà che la definisce, quando $\varphi(0) \neq 0$; perchè, sostituita al posto di $f(x)$ nella (4), dà per risultato $\varphi(y) - \varphi(0)$, e non $\varphi(y)$ soltanto. Ma basta aggiungere a $P(x)$ l'espressione

$$\frac{\operatorname{sen} n\pi}{\pi}\,\frac{\varphi(0)}{x^{1-n}}$$

per ottenere la funzione ausiliaria corrispondente al caso in esame. Infatti, ponendo

$$F(x,y) = \frac{P(x) + \dfrac{\operatorname{sen} n\pi}{\pi}\,\dfrac{\varphi(0)}{x^{1-n}}}{\psi(x,y)}$$

nell' integrale

$$\int_0^y F(x,y)\,\frac{\psi(x,y)}{(y-x)^n}\,dx\,,$$

esso si scinde in due. Il primo, per le cose dette, si riduce a $\varphi(y) - \varphi(0)$; il secondo

$$\varphi(0)\,\frac{\operatorname{sen} n\pi}{\pi}\int_0^y \frac{dx}{(y-x)^n\,x^{1-n}}$$

è uguale a $\varphi(0)$; quindi la somma è $\varphi(y)$.

Allora, procedendo come di solito, porremo

$$f(x) = Z_0(x) + f_1(x),$$

in cui

$$Z_0(x) = \frac{P(x) + \dfrac{\operatorname{sen} n\pi}{\pi}\,\dfrac{\varphi(0)}{x^{1-n}}}{\psi(x,x)}\,. \tag{6}$$

Si ottiene

$$\varphi(y) - \int_0^y \frac{Z_0(x)\,\psi(x,y)}{(y-x)^n}\,dx = \varphi_1(y) = \int_0^y \frac{f_1(x)\,\psi(x,y)}{(y-x)^n}\,dx\,,$$

ove la funzione $\varphi_1(y)$ si annulla per $y=0$. Infatti, abbiamo

$$\varphi_1(0)=\varphi(0)-\left|\int_0^y \frac{P(x)}{\psi(x,x)}\frac{\psi(x,y)}{(y-x)^n}dx\right|_{y=0}-$$
$$-\frac{\operatorname{sen} n\pi}{\pi}\varphi(0)\left|\int_0^y \frac{\psi(x,y)}{\psi(x,x)}\frac{dx}{x^{1-n}(y-x)^n}\right|_{y=0}.$$

Per le cose dette nel n. 3, il primo integrale è nullo per $y=0$. Il secondo, ponendo $x=yx_1$, diventa

$$\int_0^1 \frac{\psi(yx_1,y)}{\psi(yx_1,yx_1)}\frac{dx_1}{x_1{}^{1-n}(1-x_1)^n};$$

che per $y=0$ è uguale a $\dfrac{\pi}{\operatorname{sen} n\pi}$. Dunque $\varphi_1(0)=0$.

Per conseguenza l'equazione

$$\varphi_1(y)=\int_0^y \frac{f_1(x)\,\psi(x,y)}{(y-x)^n}dx$$

rientra nel caso considerato al n. 3; e la formula di risoluzione si deduce da quella trovata allora, ponendo per $Z_0(x)$ l'espressione (6).

È bene notare che tale espressione di $Z_0(x)$ si può porre sotto un'altra forma. Infatti

$$\frac{\operatorname{sen} n\pi}{\pi}\frac{\varphi(0)}{x^{1-n}}=-\frac{\operatorname{sen} n\pi}{\pi x}\left|(x-\xi)^n\varphi(\xi)\right|_{\xi=0}^{\xi=x}=$$
$$=\frac{\operatorname{sen} n\pi}{\pi x}\int_0^x \frac{(\xi-x)\varphi'(\xi)+n\varphi(\xi)}{(x-\xi)^{1-n}}d\xi,$$

e per conseguenza

$$P(x)+\frac{\operatorname{sen} n\pi}{\pi}\frac{\varphi(0)}{x^{1-n}}=\frac{\operatorname{sen} n\pi}{\pi x}\int_0^x \frac{\xi\varphi'(\xi)+n\varphi(\xi)}{(x-\xi)^{1-n}}d\xi=$$
$$=\frac{\operatorname{sen} n\pi}{\pi}\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{\varphi(\xi)\,d\xi}{(x-\xi)^{1-n}};$$

dunque

$$Z_0(x)=\frac{\operatorname{sen} n\pi}{\pi\,\psi(x,x)}\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{\varphi(\xi)\,d\xi}{(x-\xi)^{1-n}}.$$

Meccanica. — *Sul problema dei tre corpi. Condizioni d'urto di due di essi.* Nota del dott. Giulio Bisconcini, presentata dal Socio Volterra.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisica matematica. — *Sulla teoria dei potenziali di ordine superiore.* Nota di E. Daniele, presentata dal Socio V. Volterra (1).

La funzione potenziale, come fu dapprima introdotta im meccanica, dipendeva dalle sole coordinate dei punti del sistema dinamico, e dava luogo a forze, esse pure dipendenti dalle sole coordinate; più tardi però il concetto di funzione potenziale venne esteso in modo da potersi riferire anche a forze nelle quali figurassero, insieme alle coordinate, le loro derivate successive. Fra le prime estensioni di questo genere la più notevole è quella che permise di assegnare un potenziale alle forze che agiscono secondo la legge elettrodinamica di Weber; appartengono alle più recenti gli studî, importanti sopratutto dal lato matematico, del Königsberger, compendiati nel suo libro: *Die Principien der Mechanick* (Leipzig, Teubner, 1901).

Ma mentre si può verosimilmente ritenere che le forze dipendenti dalle sole coordinate ammettano sempre una funzione potenziale, per quelle invece che ne contengono anche le derivate si vede subito che si presenta una distinzione riguardo alla possibilità, o meno, di farle provenire da una tale funzione. Basta, alle forze elettrodinamiche ora ricordate, mettere a riscontro le cosidette forze d'attrito: alle prime, contenenti le derivate prime e seconde delle coordinate, si può assegnare, come fecero Riemann (2) e C. Neumann (3), un potenziale funzione delle coordinate e delle loro derivate prime; mentre non si può in alcun modo parlare di potenziale delle forze d'attrito. Anzi possiamo affermare che tale proprietà negativa è posseduta non solo da queste ultime forze, ma, in generale, da tutte le forze che dipendono, oltrechè dalla configurazione del sistema, anche dalle velocità dei singoli punti, cioè sono funzioni delle coordinate e delle loro derivate prime.

La ragione di questo fatto si può dare in modo puramente analitico. Ed invero il metodo con cui, secondo Riemann e C. Neumann, si ricavano da un potenziale le forze corrispondenti, si riduce, nel caso di un potenziale

(1) Presentata nella seduta dell'8 novembre 1903.

(2) *Schwere, Elektricität u. Magnetismus* (Hannover, Rümpler, 1880), p. 316.

(3) *Allgem. Untersuchungen ü. das Newton'sche Princip der Fernwirkungen* (Leipzig, Teubner, 1896), p. 222 e segg.

contenente le sole coordinate (*potenziale ordinario* di Neumann), alla solita regola di prendere le derivate del potenziale rispetto alle coordinate, e dà luogo, in conseguenza, a forze funzioni soltanto delle coordinate. Nel caso poi di un potenziale contenente anche le velocità (*potenziale effettivo* di Neumann) quel metodo conduce a forze funzioni anche delle derivate prime e seconde delle coordinate. Si vede così che le forze dipendenti dalle coordinate e dalle loro derivate prime (ma non da quelle di ordine più elevato) non si possono far provenire nè da un potenziale ordinario, nè da un potenziale effettivo: in generale, s' intende, poichè non è escluso che nelle espressioni di certe forze aventi un potenziale effettivo possano mancare i termini colle derivate seconde. Il ricercare se siffatte forze (o, che fa lo stesso, i corrispondenti potenziali) possano ammettersi realmente, e quale interpretazione loro si possa dare, costituisce l'essenza della presente Nota.

Nel n. 1 stabilisco anzitutto l' espressione analitica dei potenziali e delle forze in questione, espressione che, sia pei primi che per le seconde, è lineare nelle componenti delle velocità. Dopo di avere indicato (n. 2) una semplice proprietà di queste forze, espongo nei nn. 3-5 come quei potenziali, che a tutta prima non sarebbero da ammettersi perchè contrastanti colle definizioni meccaniche, ricevano invece un significato ricorrendo alla teoria delle masse nascoste di Helmholtz-Hertz, e più specialmente alla considerazione dei movimenti adiabatici dei sistemi ciclici.

Il caso in cui il sistema abbia un solo grado di libertà è studiato in modo particolare al n. 6 per alcune speciali proprietà cui dà luogo.

Termino accennando brevemente come si possano estendere a potenziali di ordine qualunque (cioè contenenti le derivate delle coordinate fino ad un ordine arbitrario) le considerazioni precedenti, almeno per ciò che riguarda la parte analitica della questione.

1. Siano $q_1 \dots q_\nu$ i parametri indipendenti che definiscono la configurazione di un sistema in movimento, e sia $V = V(q_1 \dots q_\nu\, q'_1 \dots q'_\nu)$ un potenziale contenente i parametri q e le loro prime derivate: per semplicità supporrò che V non contenga esplicitamente il tempo. La forza Q_i corrispondente alla coordinata q_i è data [1] dalla formola:

$$
(1) \qquad \begin{aligned} Q_i &= \frac{\partial V}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial q'_i} \\ &= \frac{\partial V}{\partial q_i} - \Sigma_s \frac{\partial^2 V}{\partial q_s \partial q'_i} q'_s - \Sigma_s \frac{\partial^2 V}{\partial q'_s \partial q'_i} q''_s . \end{aligned}
$$

Come si vede la Q_i contiene, oltre alle q e alle q', anche le q'', dalle quali dipende linearmente; se allora vogliamo che nelle Q_i le q'' manchino,

[1] V. C. Neumann, op. cit., p. 229.

si dovrà supporre che sia, per tutti i valori degli indici i e s:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial q'_s \, \partial q'_i} = 0 .$$

Ne segue che V è della forma

$$V = U(q_1 \dots q_\nu) + a_1 q'_1 + \dots + a_\nu q'_\nu , \tag{2}$$

dove tanto la U quanto le a non contengono le q'. Sostituendo questa espressione di V nella (1) si trova:

$$Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i} + \Sigma_s \, a_{si} \, q'_s , \tag{3}$$

avèndo posto

$$a_{si} = \frac{\partial a_s}{\partial q_i} - \frac{\partial a_i}{\partial q_s} .$$

Cioè, imponendo alle Q_i la condizione di non contenere le q'', esse risultano necessariamente funzioni lineari delle q'. I coefficienti di queste funzioni lineari non sono però arbitrarii, poichè i termini colle sole q sono le derivate, rispetto alla q_i corrispondente, di una stessa funzione U (che può essere qualunque), mentre fra i coefficienti a_{si} passano le relazioni

$$a_{si} + a_{is} = 0 . \tag{4}$$

2. Una prima proprietà delle forze Q_i definite dalla (3) si trova calcolando il lavoro eseguito durante uno spostamento virtuale. Questo lavoro è dato da

$$\begin{aligned} \Sigma \, Q_i \, \delta q_i &= \Sigma Q_i q'_i \, dt \\ &= \Sigma \frac{\partial U}{\partial q_i} q'_i \, dt + \Sigma_i \, \Sigma_s \, a_{si} \, q'_s \, q'_i \, dt . \end{aligned}$$

Ma per le (4) la somma doppia del secondo membro è identicamente nulla, quindi

$$\Sigma \, Q_i \, \delta q_i = \Sigma \frac{\partial U}{\partial q_i} q'_i \, dt = \delta U ,$$

cioè: *il lavoro virtuale delle forze* Q_i (*provenienti dal potenziale effettivo* V) *è lo stesso che quello delle forze* $\frac{\partial U}{\partial q_i}$ (*provenienti dal potenziale ordinario* U).

In altre parole, se noi consideriamo la Q_i come composta di due forze, della $\frac{\partial U}{\partial q_i}$ e della $F_i = \Sigma_s a_{si} q'_s$, troviamo che le forze F_i eseguiscono un lavoro nullo per ogni spostamento virtuale del sistema: esse godono cioè di una proprietà identica a quella nota delle resistenze dei vincoli in un sistema senza attrito.

Si può enunciare la stessa proprietà delle forze Q_i ancora sotto un'altra forma: *l'espressione analitica del principio della forza viva è la stessa come se, invece delle forze* Q_i, *si considerassero le* $\frac{\partial U}{\partial q_i}$. Il principio sarà dunque espresso dall'equazione

$$T - U = \text{cost}.$$

Facendo il confronto col caso delle forze che agiscono secondo la legge di Weber, si trova che qui viene a comparire, nell'equazione dell'energia, ancora un termine, ossia quel termine che nel potenziale delle forze elettrodinamiche contiene le derivate delle coordinate. La mancanza di questo termine nel caso nostro è dovuta alla circostanza della linearità del potenziale rispetto alle q'.

3. Nelle lezioni di Riemann già citate, questi avverte (p. 316) che un potenziale, il quale sia funzione anche delle derivate prime delle coordinate, deve contenerle almeno al 2° grado, se si vuole che il potenziale conservi il suo significato di una funzione che misuri colle sue differenze il lavoro delle forze applicate. Veramente in questa osservazione è implicita l'ipotesi che ogni potenziale dipendente anche dalle q' debba essere necessariamente un polinomio intero in queste quantità. A parte ciò, se noi prendiamo il potenziale V definito dalla (2), e ne formiamo il differenziale totale dV, troviamo:

$$dV = \left(\Sigma \frac{\partial U}{\partial q_h} q'_h + \Sigma_s \Sigma_h \frac{\partial a_s}{\partial q_h} q'_s q'_h + \Sigma a_h q''_h \right) dt .$$

Ora il secondo membro contiene dei termini (quelli dell'ultimo gruppo) in cui non figurano punto le q', ed una tale espressione non può identificarsi con quella del lavoro elementare

$$\Sigma Q_h q'_h \, dt ,$$

dove in ogni termine comparisce come fattore una delle q'.

Che i potenziali della forma (2) siano perciò da escludersi, non pare tuttavia necessario, non solo perchè si potrebbero considerare come un'estensione puramente analitica della nozione di potenziale, ma anche per una ragione fisica. Il mezzo, con cui i potenziali lineari nelle q' ricevono un'in-

terpretazione fisica, ci è offerto immediatamente dalla teoria dei *movimenti nascosti*, ideata da Helmholtz e posta da Hertz a base della sua meccanica: si vedrà in tal modo che un potenziale lineare nelle q' è capace di assumere un significato determinato non meno che quei potenziali cinetici (per usare la denominazione di Helmholtz) che s'incontrano in varî problemi meccanici e fisici, e nei quali le componenti della velocità entrano anche al primo grado.

4. Si consideri un movimento o, più in generale, un fenomeno che si svolga secondo una legge espressa dalle equazioni di Lagrange della seconda forma, e nel quale il potenziale cinetico sia la somma di una forma quadratica nelle q', che diremo T, e di una funzione lineare nelle q' stesse, per modo che indicando il potenziale cinetico con H si abbia:

$$\text{(5)} \qquad \mathrm{H} = \mathrm{T} + \Sigma_s\, a_s(q_1 \dots q_\nu)\, q'_s + \mathrm{U}(q_1 \dots q_\nu)\,.$$

Le equazioni del fenomeno sarebbero:

$$\text{(6)} \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial q'_i} - \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial q_i} = 0\,, \qquad (i = 1, 2, \dots, \nu)\,.$$

Il caso, da noi considerato, di un sistema in moto sotto l'azione delle forze Q_i date dalla (3) si troverebbe appunto nelle condizioni ora dette quando la forza viva fosse uguale a T.

Si imagini ora un sistema materiale dipendente, oltrechè dalle coordinate $q_1 \dots q_\nu$, anche da altre $p_1 \dots p_\mu$; e supponiamo che nel suo interno abbiano luogo dei movimenti ciclici definiti dal variare delle coordinate p. Siano cioè, nel sistema ciclico ora imaginato, $p_1 \dots p_\mu$ le *cordinate cicliche*, e $q_1 \dots q_\nu$ i *parametri* [1]; sappiamo allora che tanto nell'espressione della forza viva quanto in quella del potenziale non figureranno le p; solo le loro derivate (*intensità cicliche*) entreranno nella forza viva. Ammettiamo ancora che sul nostro sistema non agisca nessuna forza *esterna*, ossia nessun'altra forze all'infuori di quelle provenienti dal potenziale cui ora si è accennato (forze conservative). Il movimento del sistema appartiene così al tipo di quelli che Hertz chiama *movimenti adiabatici*, le cui equazioni offrono senz'altro μ integrali primi, mediante i quali è possibile eliminare le intensità cicliche, riducendo così le $\mu + \nu$ equazioni primitive ad un sistema di ν equazioni fra i soli parametri. Ciò che in questa eliminazione è importante, è il fatto, come ben si sa, che le ν equazioni risultanti conservano la forma delle equazioni di Lagrange, a condizione di assumere, come nuovo poten-

[1] Queste denominazioni, com'è noto, sono di Hertz; cfr. *Die Prinzipien der Mechanik* etc. (Leipzig, Barth, 1894), p. 235 e segg.

ziale cinetico, una certa espressione somma di una forma quadratica nelle q' e di una funzione lineare nelle q' stesse. Insomma le equazioni del movimento, dopo eliminate le p', sono identiche nella forma alle equazioni (6), dove si ponga per H ancora un' espressione della forma (5).

5. Ed allora è possibile trarre la seguente conclusione.

Supposto H dato dalla (5), le (6) si possono interpretare in due modi diversi: o come le equazioni del movimento d' un sistema la cui forza viva è T ed è soggetto a forze (contenenti le q') derivanti dal potenziale $U + \Sigma a_s q'_s$, o come le equazioni che definiscono il movimento d' insieme di un sistema (conservativo) nel cui interno esistano moti ciclici, e sul quale non agiscano forze esterne. Interpretando le (6) in quest' ultimo modo non è più possibile distinguere, nel potenziale cinetico, la forza viva dalla funzione potenziale; ad ogni modo però le forze (e così pure la funzione potenziale) non contengono più altro che le coordinate, e precisamente le q, cioè i parametri del movimento ciclico.

La doppia interpretazione di cui sono capaci le equazioni (6) contiene appunto la ragione per cui le forze Q_i del tipo (3) o, che fa lo stesso, i potenziali V del tipo (2) non sono da rigettarsi come privi di significato fisico, e come pure estensioni analitiche della definizione di forza o di potenziale. Il significato che a loro spetta non risulta però dal considerarli in sè e per sè, ma dalla parte che essi hanno nelle equazioni del movimento in quanto sono combinati coll'espressione della forza viva: le forze di quel tipo si possono sostituire alla concezione delle masse nascoste quando si tratti di interpretare meccanicamente un potenziale cinetico che contenga le componenti delle velocità *anche* al primo grado.

6. Una menzione particolare merita il caso in cui il sistema dipenda da una sola coordinata q. Il potenziale V sarà della forma

$$V = U(q) + a(q)\,q' , \tag{7}$$

e per la forza Q si ha:

$$Q = \frac{\partial U}{\partial q} ;$$

qui difatti i coefficienti a_{si} della (3) si riducono ad uno solo coi due indici eguali, e questo per la (4) è nullo. Nel caso attuale dunque la forza proveniente da un potenziale effettivo, lineare nella q', si riduce ad una forza proveniente da un potenziale ordinario; si può esprimere la cosa in altri termini dicendo che nel movimento definito dal potenziale V dato dalla (7) non ha nessuna influenza il termine in q'. Notisi poi che l'interpretazione coi movimenti nascosti, che valeva nel caso generale, non cessa punto di valere adesso. Ed in realtà, al fatto che il termine in q' non influisce sulla equazione del mo-

vimento, fa riscontro, nella teoria dei moti nascosti, una proprietà perfettamente analoga.

Imaginiamo difatti un sistema con movimenti ciclici interni, soggetto a sole forze conservative, nel quale tutte le coordinate siano cicliche salvo una, che diremo q. Eliminate tutte le intensità cicliche, ci ridurremo ad un potenziale cinetico della forma

$$H = \frac{1}{2} A q'^2 + B q' + C,$$

dove A, B, C sono funzioni della sola q, e dove inoltre B è generalmente diverso da zero, come si può vedere eseguendo il calcolo effettivo di H. Ma se noi scriviamo l'equazione del movimento

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial q'} - \frac{\partial H}{\partial q} = 0,$$

e la sviluppiamo, troviamo:

$$A q'' + \frac{1}{2}\frac{dA}{dq} q'^2 - \frac{dC}{dq} = 0,$$

e questa non contiene più traccia del termine lineare in q' nell'espressione di H. Ciò permette di dire che il movimento d'insieme del sistema avviene come se, in luogo del potenziale cinetico H, si assumesse l'altro più semplice

$$H_0 = \frac{1}{2} A q'^2 + C,$$

nel quale è possibile distinguere la forza viva del potenziale.

In sostanza abbiamo le due seguenti proposizioni, che corrispondono ad un medesimo fatto analitico:

a) *Il potenziale* $V = U(q) + a(q)\, q'$ *dà luogo alla stessa forza cui dà luogo il potenziale* U; *ossia, nel moto corrispondente non ha alcuna influenza il termine in* q';

b) *Il movimento d'insieme di un sistema con moti ciclici interni, definito dal potenziale cinetico* $H = \frac{1}{2} A q'^2 + B q' + C$ (*ove* A, B, C *sono funzioni di* q), *avviene come se, non esistendo i moti interni, al sistema fosse applicata la forza* $\frac{dC}{dq}$, *con una forza viva uguale a* $\frac{1}{2} A q'^2$.

7. Si potrebbe tentare di estendere le considerazioni dei numeri precedenti a quei potenziali che contengono, insieme colle coordinate, non solo le

loro derivate prime, ma anche le derivate successive fino ad un ordine qualunque n (potenziali d'ordine n). In vista però dello scarso valore fisico che avrebbe una tale estensione, mi limiterò ad alcuni brevissimi cenni affatto ovvii di natura analitica.

Essendo $V(q_1 \dots q_\nu\ q'_1 \dots q'_\nu \dots q_1^{(n)} \dots q_\nu^{(n)})$ un potenziale di ordine n dipendente da ν parametri, si assume come forza relativa alla coordinata q_i l'espressione [1]

$$Q_i = \frac{\partial V}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial q'_i} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial V}{\partial q''_i} - \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dt^n}\frac{\partial V}{\partial q_i^{(n)}} . \tag{8}$$

Si vede che Q_i conterrà, oltre alle q, anche le loro successive derivate fino a quelle di ordine $2n$. È lecito tuttavia domandare se non si possa particolarizzare la funzione V in modo che nelle Q_i vengano a mancare i termini colle $q^{(2n)}$. La risposta è assai facile, poichè appare dalle (8) come le Q_i siano lineari nelle $q^{(2n)}$, ed i coefficienti di questi termini siano tutti della forma

$$\frac{\partial^2 V}{\partial q_i^{(n)}\, \partial q_h^{(n)}} .$$

Si otterrà allora l'effetto voluto scrivendo che debbono essere identicamente nulle tutte queste derivate seconde di V per $i, h = 1, 2, \dots, \nu$. Ne segue che V dovrà essere lineare nelle derivate n^{me} delle q, e le forze Q_i conterranno le derivate d'ordine $2n-1$ pure linearmente; indicando poi con a_{is} il coefficiente di $q_s^{(2n-1)}$ in Q_i, si hanno le relazioni: $a_{is} + a_{si} = 0$.

Facendo $n = 1$ si ricadrebbe nelle formole e nei risulati che si sono già ottenuti in precedenza direttamente.

8. Ma tralasciamo il caso generale, e veniamo invece a quello in cui, essendo sempre n qualunque, si ha però $\nu = 1$, cioè il sistema dipende da un solo parametro q.

Se si vuole che la forza Q, derivante dal potenziale $V(q\, q' \dots q^{(n)})$, non contenga il termine in $q^{(2n)}$, dovrà V essere della forma

$$V = U(q\, q' \dots q^{(n-1)}) + a(q\, q' \dots q^{(n-1)})\, q^{(n)} ,$$

mentre in Q verrà a mancare anche il termine in $q^{(2n-1)}$.

È poi facile vedere che se si impone, di più, a Q la condizione di non contenere neppure $q^{(2n-2)}$, allora non contiene neanche $q^{(2n-3)}$ e così via. In generale *la più alta derivata di q contenuta in Q è necessariamente d'ordine pari.*

[1] V. Königsberger, op. cit. p. 42.

Per provarlo non abbiamo che da ricorrere alle formole date dal sig. Königsberger nel suo libro già citato. Egli stabilisce (pagg. 22 e 23) le condizioni necessarie e sufficienti cui debbono soddisfare, nel caso più generale, le funzioni Q_i (delle q e delle loro derivate successive fino alla $(2n)^{ma}$) affinchè si possano far discendere da un' unica funzione V (delle q e loro derivate fino alla n^{ma}) mediante la formola (8). Tali condizioni sono le seguenti:

$$(9)\quad \begin{gathered} \frac{\partial Q_i}{\partial q_j^{(k)}} - (k+1)\frac{d}{dt}\frac{\partial Q_i}{\partial q_j^{(k+1)}} + \binom{k+2}{2}\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial Q_i}{\partial q_j^{(k+2)}} - \dots \\ + (-1)^{2n-k}\binom{2n}{2n-k}\frac{d^{2n-k}}{dt^{2n-k}}\frac{\partial Q_i}{\partial q_j^{(2n)}} = (-1)^k \frac{\partial Q_j}{\partial q_i^{(k)}}, \\ \begin{pmatrix} k = 0, 1, 2, \dots 2n \\ i, j = 1, 2, \dots \nu \end{pmatrix} \end{gathered}$$

che si riducono, per $\nu = 1$, a queste altre:

$$\{1 - (-1)^k\}\frac{\partial Q}{\partial q^{(k)}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial Q}{\partial q^{(k+1)}} + \dots + (-1)^{2n-k}\binom{2n}{2n-k}\frac{d^{2n-k}}{dt^{2n-k}}\frac{\partial Q}{\partial q^{(2n)}} = 0,$$

dove per avere delle equazioni distinte basta dare a k i valori $1, 3, \dots, 2n-1$. Ora non rimane che scrivere distesamente questo sistema di equazioni per verificare quello che si è asserito.

Per $\nu \geq 2$ le (9) mostrano soltanto che se nelle Q_i son nulli tutti i termini colle $q^{(2n)}$, allora in ciascuna Q_i svanisce il termine con $q_i^{(2n-1)}$.

Le (9) ci permettono poi anche di constatare che in un potenziale di 1° ordine a ν parametri, lineare nelle derivate di questi, cioè in un potenziale della forma (2) da noi precedentemente studiata, i coefficienti sono affatto indipendenti l' uno dall' altro. Ed invero questo equivale a dire che, prese comunque nelle (2) le funzioni $U, a_1, \dots, a_\nu$, sostituendo nelle (9) le espressioni (3) delle Q_i, le (9) stesse diventano altrettante identità. Ora i tre gruppi di eguaglianze a cui in questo caso si riducono le (9) corrispondentemente ai valori 0, 1, 2 di k sono costituiti:

1) da identità evidenti;

2) dalle relazioni $a_{rs} + a_{sr} = 0$, che sono le (4) e valgono identicamente;

3) dalle eguaglianze

$$\Sigma_r \frac{\partial a_{rs}}{\partial q_t} q'_r - \frac{da_{ts}}{dt} = \Sigma_r \frac{\partial a_{rt}}{\partial q_s} q'_r,$$

che si possono scrivere:

$$\Sigma_r \left(\frac{\partial a_{rs}}{\partial q_t} + \frac{\partial a_{st}}{\partial q_r} + \frac{\partial a_{tr}}{\partial q_s} \right) q'_r = 0 ,$$

e queste sono pure identità, perchè si ha identicamente, in causa della forma delle funzioni a_{rs}, qualunque siano gli indici r, s, t:

$$\frac{\partial a_{rs}}{\partial q_t} + \frac{\partial a_{st}}{\partial q_r} + \frac{\partial a_{tr}}{\partial q_s} = 0 .$$

Fisica. — *Sulla determinazione della tensione superficiale dei liquidi coi metodi delle goccie cadenti e delle bolle gazose.* Nota di G. Guglielmo, presentata dal Socio P. Blaserna [1].

Uno dei modi più semplici e facili per determinare la tensione superficiale di un liquido, è quello di pesarne le goccie che si staccano dall'orifizio di una pipetta dopo aver misurato il diametro minimo del collo della goccia un momento prima che questa incominci a staccarsi. Un modo simile e per alcuni rispetti preferibile, è quello di determinare il volume o il peso apparente delle bolle gazose che si fanno svolgere in seno al liquido, e misurare il diametro minimo del collo o peduncolo della bolla un momento prima che essa incominci a staccarsi.

Con questi metodi si ha anche il vantaggio che rinnovandosi continuamente la superficie del liquido al formarsi delle successive goccie o bolle, essa rimane o diviene assai facilmente priva delle impurità, molto nocive all'esattezza dei risultati. Inoltre collo stesso apparecchio o con lievi modificazioni del medesimo, si può determinare la pressione minima necessaria perchè la goccia o bolla si formi e stacchi, ed altresì proiettare e disegnare su di uno schermo l'immagine ingrandita della goccia o bolla e ricavare così altri valori della tensione superficiale cercata.

Contro l'uso del metodo delle goccie cadenti, sta il fatto che i valori che si sono ottenuti con esso per la tensione superficiale dell'acqua sono oltremodo discordi, poichè vanno da 4,5 a 10,5 mgr. per millimetro; però i seguenti ragionamenti e calcoli dimostrano che tale discrepanza è dovuta interamente al modo inesatto col quale essi valori vennero calcolati, oppure alle condizioni disadatte nelle quali vennero eseguite le esperienze.

Condizioni d'equilibrio della goccia un momento prima che essa incominci a staccarsi. — La maggior parte dei fisici che hanno sperimentato con questo metodo ed anche varî autori di trattati recenti, ammettono che la tensione superficiale perpendicolare alla periferìa dell'orifizio, o più esatta-

[1] Presentata nella seduta dell'8 novembre 1903.

mente alla periferìa della sezione orizzontale di raggio minimo della goccia quando questa sta per staccarsi, faccia equilibrio al peso della medesima, sostenuto appunto dalla tensione superficiale; quindi se si chiama T questa tensione per unità di lunghezza, r il raggio minimo suddetto, P il peso della goccia si abbia:

$$(1) \qquad 2\pi r\,\mathrm{T} = \mathrm{P} \qquad \mathrm{T} = \mathrm{P} : 2\pi r$$

Ciò difatti pare evidente, ma in realtà si omette di tener conto della pressione nell'interno della goccia, che certamente non è nulla e coopera col peso della goccia stessa a produrne la caduta; così la trazione necessaria per spezzare un pallone in due metà diminuisce quando aumenta la pressione nel suo interno. Tale omissione apparisce anche manifesta quando si vuole applicare la suddetta equazione alla porzione di goccia sottostante alla sezione di raggio massimo, poichè si trova che il primo membro è cresciuto essendo cresciuto il raggio, mentre il secondo che rappresenta il peso della porzione di goccia è diminuito; l'uguaglianza necessaria per l'equilibrio si ristabilisce quando si tenga conto della pressione interna la cui azione, che va aggiunta a quella del peso, è aumentata perchè è aumentata la profondità, e perchè è aumentata l'area della sezione sulla quale essa si esercita. Quindi se p è la pressione idrostatica nella sezione che si considera, per l'equilibrio dovrà essere:

$$(2) \qquad 2\pi r\,\mathrm{T} = \mathrm{P} + \pi r^2 . p \qquad \mathrm{T} = \mathrm{P} : 2\pi r + \tfrac{1}{2} pr$$

relazioni che possono applicarsi tanto al collo che al ventre della goccia, ed in generale ad una sezione orizzontale qualsiasi, purchè per T si prenda la componente verticale della tensione e per P il peso della goccia sottostante alla sezione considerata.

[Nel caso d'una sezione meridiana terminata dall'intersezione colla sezione orizzontale di raggio minimo o massimo, se L è la lunghezza della curva meridiana così limitata, S l'area dalla medesima racchiusa, p la pressione che si esercita sul centro di pressione di essa area, si ha la relazione:

$$\mathrm{TL} = p\mathrm{S}$$

che può servire alla determinazione di T].

Non è certo supponibile che siano incorsi nella suddetta omissione i fisici o matematici che si occuparono di proposito della trattazione matematica di questo argomento. Così trovo che Dupré nella sua *Théorie mathématique de la chaleur*, 1869, pag. 319 (ove inoltre si riferisce a parecchie sue Memorie antecedenti e ad una *Mémoire sur la capillarité* del Bertrand apparsa nel Journal de mathém. pures et appliquées, t. XIII) stabilisce la condizione esatta d'equilibrio per la porzione di goccia sottostante ad una sezione orizzontale qualunque, adotta per la pressione nell'interno della goccia il valore

dato dalla formula di Laplace $T\left(\frac{1}{\varrho}+\frac{1}{\varrho'}\right)$ essendo ϱ e ϱ' i raggi di curvatura della sezione meridiana e della sezione normale perpendicolare a questa, e trova così per il peso della goccia sottostante alla sezione orizzontale di raggio minimo:

$$P = \pi r^2 T\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{\varrho}\right)$$

dove r e ϱ che sono di segno contrario sono presi in valore assoluto. Inoltre Duprè trova che se si considera la sezione orizzontale passante per il punto d'inflessione della curva meridiana (nel quale si ha $\varrho = 0$) la componente verticale della tensione superficiale fa equilibrio, non già al peso della porzione di goccia sottostante, ma al doppio di questo peso.

Più recentemente Worthington (Beiblätter, 1882, p. 177) osserva la suddetta omissione ma, forse occupandosi precipuamente di esporre il suo nuovo metodo pregevolissimo, fondato sulla proiezione e disegno dell' immagine della goccia, nel correggere quest'errore trascura alla sua volta la curvatura negativa della curva meridiana, nel punto dove avverrà la separazione della goccia, adotta quindi per la pressione interna nel collo della goccia il valore T/r invece di $T\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\varrho}\right)$ ed ottiene $T = P : \pi r$, ossia che i valori trovati per T dagli sperimentatori precedenti andrebbero raddoppiati, e sebbene questi valori, se ottenuti nelle migliori condizioni, siano spesso molto inferiori a quelli ottenuti cogli altri metodi, tuttavia raddoppiati diverrebbero affatto inammissibili e sarebbe dimostrata l'erroneità del metodo delle goccie cadenti.

Che questo modo di calcolare la pressione nell' interno della goccia, trascurando cioè la curvatura suddetta non possa in nessun caso essere esatto risulta da ciò, che in tal caso il collo della goccia sarebbe cilindrico, la pressione superficiale $T : r$ sarebbe la stessa a diverse altezze, mentre quella idrostatica che le fa equilibrio cresce colla profondità.

Alcuni modi per determinare la pressione nell'interno delle goccie. — Poichè la formula usata più generalmente per dedurre il valore della tensione superficiale dal peso delle goccie è inesatta ed è pure inesatta, forse in maggior grado, la correzione indicata da Worthington, interessa vedere quali valori si otterrebbero usando la formula esatta. Occorre perciò conoscere la pressione p nella sezione di raggio minimo, pressione che non può essere ottenuta idrostaticamente misurando la profondità di tale sezione rispetto ad una superficie libera piana ed orizzontale del liquido, perchè la superficie libera della goccia, non potendo essere in equilibrio stabile colla superficie suddetta, troverebbesi in un periodo o di accrescimento e separazione o di contrazione per ridursi a un menisco e le leggi d'idrostatica non sarebbero applicabili.

Occorre dunque dedurre la pressione superficiale in un punto qualunque servendosi della formula di Laplace (la pressione negli altri punti poi s'ottiene idrostaticamente nota la differenza di livello) ed il punto preferibile è certamente quello infimo dove le due sezioni normali considerate nella formula sono anche sezioni meridiane e quindi uguali, ed i due raggi di curvatura si riducono ad un solo, il quale inoltre rimane pressochè costante per un gran tratto della sezione meridiana. Sarebbe comoda anche la determinazione dei raggi di curvatura nel collo della goccia e l'uso della formula di Dupré, perchè uno di essi, il semidiametro minimo r si misura facilmente e dev'essere in ogni caso determinato; però l'altro raggio di curvatura, quello negativo della sezione meridiana, varia molto rapidamente da punto a punto ed è perciò difficilmente misurabile con esattezza.

Un modo molto comodo per misurare entrambi i raggi di curvatura in un punto qualsiasi della superficie della goccia è stato proposto ed usato da Worthington, e consiste nel proiettare su uno schermo l'immagine ingrandita d'una goccia ed ivi fotografarla o segnarne col lapis il contorno. Si può così con un compasso, noto l'ingrandimento, misurare sul disegno il raggio di curvatura R nel punto infimo della goccia e la distanza h di questo punto dalla sezione di raggio minimo.

Si può invece osservare la goccia con un cannocchiale o microscopio munito di micrometro oculare semplice, o meglio di un micrometro oculare a quadrellini quale si usa in Microscopìa e misurare: 1° il diametro minimo orizzontale del collo della goccia; 2° il diametro massimo orizzontale del ventre della goccia ben poco differente, come risulta dalle misure, dal doppio del raggio di curvatura nel punto infimo; 3.° l'altezza suddetta h della goccia. È chiaro che, sia che si disegni l'immagine della goccia o se ne misurino le dimensioni principali, occorrerà prima determinare all'ingrosso le dimensioni d'una goccia che sta per staccarsi, e poscia, quando la seguente s'avvicina a queste dimensioni, occorrerà rendere lentissimo e seguire l'accrescimento della goccia.

In questi modi si può determinare esattamente la pressione $p = 2T : R - hd$ nella sezione di raggio minimo e calcolare il valore esatto di T mediante la formula (2).

Quando R ed h non siano stati determinati e non siano noti, come avviene per le antiche esperienze, che il peso della goccia ed il diametro dell'orifizio, si può tuttavia dedurre da questi dati un valore abbastanza approssimato della tensione cercata. Teoricamente, anzi, dovrebbe esser possibile dedurne il valore esatto, perchè la forma della goccia è perfettamente determinata; tuttavia l'equazione in coordinate Cartesiane della curva meridiana non mi parve molto facile a trattare ed ho ricorso a mezzi meno rigorosi, supponendo cioè che la goccia abbia una forma geometricamente semplice, rassomigliante il più possibile a quella della goccia vera e di uguale volume.

Così per le goccioline molto piccole, il raggio R potrà ottenersi con errore piccolissimo dall' ipotesi che esse siano sferiche; quindi sia

$$\frac{4}{3}\pi R^3 d = P \quad , \quad R = \sqrt[3]{3P : 4\pi d}.$$

Se si suppone inoltre che la pressione 2T : R che ne risulta valga per il centro della goccia e sia 2T : R + Rd la pressione nel punto infimo e 2T : R — Rd quella cercata alla sommità della goccia la (2) ci darà:

$$T = \frac{P}{2\pi r} + \frac{r}{2}\left(\frac{2T}{R} - Rd\right)$$

ossia osservando che $P : 2\pi r = {}^4/_3\, \pi R^3\, d : 2\pi r = 2R^3\, d : 3r$ si avrà:

$$T = \frac{P}{2\pi r}\,\frac{1 - 3r^2 : 4R^2}{1 - r : R} = \frac{P}{2\pi r}\left[1 + \frac{r}{R} + \frac{1}{4}\left(\frac{r^2}{R^2} + \frac{r^3}{R^3} + \cdots\right)\right].$$

Se invece si suppone che il valore 2T : R della pressione valga per il punto infimo della goccia (ciò che invero non sarebbe giustificato perchè la gocciolina per effetto della gravità sarà, sebbene di poco, allungata verticalmente ed il raggio di curvatura nel punto infimo sarà minore del raggio medio della gocciolina) s'avrebbe per la pressione cercata alla sommità della goccia $p = 2T : R - 2R$ e risulterebbe:

$$T = \frac{P}{2\pi r}\,\frac{1 - 3r^2 : 2R^2}{1 - r : R} = \frac{P}{2\pi r}\left[1 + \frac{r}{R} - \frac{1}{2}\left(\frac{r^2}{R^2} + \frac{r^3}{R^3} + \cdots\right)\right].$$

Se invece si suppone che il valore 2T : R della pressione valga per la sommità della goccia (ciò che equivale a supporre che nel valore della pressione $p = 2T : R - R$, il 2° termine sia trascurabile rispetto al primo) s'avrebbe $p = 2T : R$, e:

$$T = \frac{P}{2\pi r}\,\frac{1}{1 - r : R} = \frac{P}{2\pi r}\left[1 + \frac{r}{R} + \frac{r^2}{R^2} + \cdots\right].$$

Siccome per la legge di Tate $r : R^3$ è, almeno approssimativamente, costante, ne segue che $r : R$ decresce proporzionatamente ad R^2 e sarà molto piccolo per piccoli valori di r mentre $r^2 : R^2$ sarà certamente trascurabile e tanto più $r^3 : R^3$ ecc. Da tutte tre le ipotesi risulta dunque:

$$T = \frac{P}{2\pi r}\left(1 + \frac{r}{R}\right) \tag{3}$$

che vale certamente quando $r^2 : R^2$ è trascurabile. Se R poi è così piccolo che sia trascurabile anche $r : R$ si ha:

$$T = \frac{P}{2\pi r} \quad , \quad \frac{P}{r} = \text{costante.}$$

Quindi nel caso di goccioline molto piccole, tali che $r : R$ sia trascubile, si può trascurare la pressione nell'interno della goccia e la legge di Tate è valida, perchè sebbene essa pressione sia grande, l'area πr^2 sulla quale essa si esercita è piccolissima.

A formule ben poco diverse e riducentisi similmente a

$$T = \frac{P}{2\pi r}\left(1 + \frac{r}{R}\right)$$

si giunge nell'ipotesi che la gocciolina abbia la forma, molto simile al vero, di una sfera sormontata da un cono ad essa tangente con apertura p. es. di 90°.

Nel caso di goccie non piccole questi modi di ottenere p divengono meno soddisfacenti, non tanto forse per la differenza tra la forma vera della goccia e la forma sferica, quanto perchè il valore di p è dato da una differenza di cui il primo termine decresce ed il secondo cresce quando cresce R, e quindi uno stesso errore relativo nell'apprezzamento di ciascuno di essi ha un'importanza nociva crescente con R. Inoltre riesce sempre più difficile stabilire per quale altezza sia valido il valore $2T : R$ (non essendo R il valore vero del raggio di curvatura ma un valore medio), e rimane così incerto il valore del 2° termine, e finalmente come apparisce nella (2) il valore di p e quindi anche il possibile errore è moltiplicato per r crescente proporzionalmente al quadrato di R.

Le goccie medie o grandi (al disotto della sezione di area minima) si possono considerare come composte di due parti, una inferiore approssimatimente emisferica ed una superiore quasi conica. Per calcolare R ho supposto che queste due parti avessero ugual volume e che l'inferiore fosse esattamente emisferica; relativamente alla parte superiore ho fatto due ipotesi, una che la sua altezza fosse R, lasciando indeterminata la forma, l'altra che questa fosse un tronco di cono avente per basi la base dell'emisfero sottostante, di raggio R e la sezione di area minima, di raggio r.

Relativamente all'altezza ove deve ritenersi esatto il valore $2T : R$ della pressione, non v'ha dubbio che debba essere superiore al punto infimo della goccia ove il raggio di curvatura della superficie è certemente minore del valore medio calcolato R; tenendo conto della forma allungata verticalmente della goccia, non m'è parso che tale pressione potesse esser valida nel centro dell'emisfero che nelle ipotesi suddette riesce troppo vicino alla sezione di

area minima. Ho quindi supposto che essa pressione $2T : R$ fosse esatta per lo strato medio equidistante dal punto infimo e dal centro dell'emisfero.

Ciò posto nel caso che la metà superiore della goccia si supponga di altezza R, si ha:

$$(4) \qquad p = \frac{2T}{R} - \frac{3}{2} R \qquad T = \frac{P}{2\pi r} \frac{1 - 9r^2/8R^2}{1 - r/R}$$

e nel caso che la metà superiore si supponga in forma di tronco di cono colle basi di raggi R ed r, l'altezza di questo sarà: $2R^3 : (R^2 + Rr + r^2)$ e sarà:

$$(5) \qquad p = \frac{2T}{R} - \frac{2R^3}{R^2 + Rr + r^2} - \frac{1}{2} R, T =$$

$$= \frac{P}{2\pi r} \frac{1 + \frac{r}{R} - \frac{1}{2}\frac{r^2}{R^2} - \frac{3}{8}\left(\frac{r^2}{R^2} + \frac{r^3}{R^3} + \frac{r^4}{R^4}\right)}{1 - r^3 : R^3}$$

Entrambi questi valori divengono uguali ai precedenti trovati per le goccioline quando $r^2 : R^2$ sia trascurabile.

Nella seguente tabella sono riferiti indicandoli rispettivamente con A′, A″, i valori dei due fattori che moltiplicano $P : 2\pi r$ nelle due ultime formule, calcolati per valori di $r : R$ crescenti successivamente di 0,1; essa indica l'andamento di essi fattori quando cresce $r : R$, indica le loro differenze per ogni valore di $r : R$ e può servire per calcolare per interpolazione il loro valore per un valore qualsiasi di $r : R$:

$r : R$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0.7	0,8	0,9
A′	1,10	1,194	1,28	1,37	1,44	1,49	1,50	1,40	1,10
A″	1,10	1,17	1,24	1,31	1,38	1,47	1,60	1,84	2,47

Risulta da questa tabella che i valori di A′ ed A″ per ogni singolo valore di $r : R$ non superiore a 0,7 sono abbastanza concordi, poscia il valore di A′ diventa evidentemente troppo piccolo, quello di A″ troppo grande ma la loro media parrebbe ancora ammissibile.

Come verifica delle formule (4) e (5), per ottenere il valore corretto della tensione superficiale dei liquidi dal peso delle goccie, le ho applicate ad alcune esperienze di Quincke (Pogg. Ann.) sull'acqua e sul mercurio, ad altre riferite da Leduc e Sacerdote (Comptes Rendus, t. 135, 1902) pure sull'acqua e sul mercurio e ad alcune esperienze sulle bolle svolgentisi nell'acqua da foro in parete sottile, da me eseguite nel 1899 e poi interrotte, visto che i valori di T ottenuti colla formula (1) erano poco soddisfacenti. Nella seguente tabella, di cui la 1ª parte si riferisce all'acqua, l'altra separata da una linea orizzontale al mercurio, $2r$ indica il diametro in millimetri dell'orifizio o

quello minimo del collo della goccia o bolla, P il peso in milligrammi delle goccie o quello della spinta idrostatica per le bolle, R il raggio della goccia o bolla ridotta sferica, $P : 2\pi r$ il valore erroneo T_1, della tensione superficiale ottenuto colla formula (1) senza tener conto della pressione interna, T_4 e T_5 i valori corretti della tensione ottenuti colle formule (4) e (5), A l'iniziale del nome dell'autore e l'indicazione del metodo sperimentale.

$2r$	P	R	$r : R$	$P : 2\pi r$	T_4	T_5	A
0,0904	1,97	0,778	0,06	6,94	7,36	7,36	G., bolle
0,14	3,00	0,895	0,08	6,82	7,37	7,37	» goccie
0,50	9,70	1,325	0,190	6,26	7,45	7,32	Q., »
0,66	13,4	1,47	0,22	6,46	7,81	7,69	G., bolle
1,10	21,45	1,72	0,31	6,21	8,01	7,76	L., goccie
1,13	21,0	1,71	0,33	5,93	7,77	7,47	G., bolle
1,93	32,5	1,98	0,49	5,36	7,68	7,36	» »
2,00	36,0	2,05	0,49	5,73	8,19	7,85	» »
2,00	34,0	2,01	0,50	5,41	7,79	7,47	L., goccie
2,48	42,2	2,16	0,574	5,43	8,02	7,82	Q., »
3,40	55,1	2,36	0,72	5,16	7,64	8,51	L., »
0,27	59,9	1,02	0,13	70,6	80,0	79,1	» »
0,308	42,2	0,906	0,17	43,6	51,0	51,1	Q., »
0,63	85,7	1,15	0,274	43,3	54,6	52,8	L., »
1,03	130,7	1,32	0,39	40,4	55.35	52,9	Q., »
1,10	133,8	1,33	0,414	38,7	53,4	51,1	L., »
2,00	220,5	1,58	0,633	35,1	52,6	52,6	» »

Da questa tabella risulta: 1° che il valore della tensione superficiale calcolato colla formula $T_1 = P : 2\pi r$ si discosta tanto più da quello trovato cogli altri metodi (che per l'acqua è generalmente compreso fra 7,5 ed 8,1) quanto maggiore è il diametro dell'orifizio e quindi $r : R$, ciò che è d'accordo colle formule (3), (4) e (5).

2° I. valori della tensione superficiale calcolati colle formule (4) e (5) rimangono compresi fra i suddetti limiti, salvo poche eccezioni. I valori ottenuti colla formula (4) sono un po' maggiori di quelli ottenuti colla formula (5) ma sono ugualmente plausibili e concordi; le differenze che essi presentano non accennano (fatta eccezione dei casi estremi) ad alcuna regola, indizio di errore sistematico, ed esse non parranno grandi se si considera che la precedente tabella non rappresenta una serie di esperienze eseguite da uno stesso sperimentatore in condizioni identiche, e con piccolo intervallo di tempo, ma presenta financo differenze di metodo (goccie e bolle); inoltre esse diminuiscono ancora se si prendono le medie dei valori ottenuti in ciascun caso colle due formule (4) e (5).

3°. I valori della tensione ottenuti per i minori valori di r colle formule (4) e (5) sono identici, ma sebbene appunto nel caso di goccioline non si possa dubitare dell'esattezza di queste formule, essi sono un po' minori di quelli generalmente ammessi e di quelli ottenuti per maggiori valori di r.

Non ho riferito i risultati di altre esperienze di Quincke eseguite con rapida successione di goccie, perchè questa è certamente causa di gravi errori, nè altri risultati di Leduc e Sacerdote per maggiori valori di r perchè il diametro indicato dell'orifizio era certamente maggiore di quello del collo della goccia al quale solo si riferisce il calcolo. Il valore della tensione superficiale del mercurio nel caso di $r = 0{,}27$ così differente dal valore generalmente ammesso e da quello ottenuto da Quincke per $r = 0{,}31$, è molto probabilmente dovuto ad errori fortuiti nell'esperienze.

Costanza del peso della goccia mentre si stacca. — Una obbiezione che viene fatta frequentemente e sotto varie forme al metodo delle goccie cadenti si è che la condizione d'equilibrio sul quale esso si fonda si riferisce al peso della goccia ancora aderente alla pipetta, mentre il peso determinato coll'esperienza è quello della goccia caduta che può esser diverso dal primo. È stato osservato a tale proposito da Leduc e Sacerdote (l. c.) che la goccia si stacca non per rottura ma per deformazione della superficie, e Worthington fa osservare che la superficie della goccia che sta per distaccarsi è in equilibrio sempre meno stabile, simile a quello delle goccie o bolle cilindriche sottratte alla gravità o di peso trascurabile, studiate da Plateau, delle quasi si fa crescere l'altezza; quindi le goccie si staccherebbero in seguito a tale instabilità e non per l'effetto diretto del peso.

Un grande fondamento di queste critiche era il disaccordo fra la teoria ed i risultati; ora ristabilito l'accordo mediante i precedenti ragionamenti e calcoli, anche le obbiezioni perdono molto del loro peso.

È inoltre da notare che il caso delle goccie o bolle cilindriche suddette come altresì quello della vena liquida è ben diverso da quello delle goccie pesanti, poichè la superficie cilindrica essendo geometricamente identica a tutte le altezze, uno strozzamento può effettuarsi indifferentemente ad una qualsiasi di esse, mentre per la goccia pesante l'altezza ove si produce la separazione (quando siano raggiunte le condizioni perchè essa si produca) è molto ben determinata e non si può concepire che avvenga altrove, solo ivi la stabilità dell'equilibrio è nulla, ed esso vien distrutto dalla minima scossa o aumento di peso.

È bensì probabile che durante lo strozzamento, per effetto dell'adesione al solido o per l'azione della gravità una parte della goccia considerata nella condizione d'equilibrio rimanga aderente al solido, tuttavia nel caso di piccole goccie per le quali $\frac{r}{R}$ è piccolo uno straterello di raggio r e di altezza appena visibile non influirebbe molto sul volume $\frac{4}{3}\pi R^3$ della goccia, e nel caso di goccie grandi la separazione si produce a tal distanza dal solido che l'azione anche mediata di questo è piccola. Proiettando e disegnando le immagini ingrandite di una goccia su uno schermo, osservai che se questa era

molto piccola, la quantità di liquido rimasta aderente alla pipetta dopo che si era staccata la goccia era così piccola da essere difficilmente apprezzabile, mentre nel caso di goccie grandi che presentavano nel collo uno strozzamento ben deciso, il volume del liquido al disopra della sezione minima risultò uguale a quello che rimaneva aderente. In entrambi i casi il peso della goccia caduta era uguale a quello considerato nella condizione d'equilibrio.

Influenza della rapidità dell'accrescimento delle goccie sul loro peso. — Se la goccia s'accresce rapidamente, essa s'accresce sensibilmente anche durante il periodo della sua separazione, il quale è molto rapido nella sua ultima fase ma è lento inizialmente quando la forza risultante che produce la separazione è pressochè nulla ed il liquido non ha acquistato velocità; ne risulta che il peso della goccia caduta è certamente maggiore di quello della goccia ancora equilibrata. Un'azione opposta, di solito probabilmente poco sensibile, deriva da ciò che nell'interno della goccia alla pressione idrostatica s'aggiunge quella idrodinamica ed il peso occorrente per produrre la separazione risulta diminuito.

L'aumento del peso delle goccie causato dalla rapidità d'accrescimento delle goccie può compensare in tutto o in parte l'errore proveniente dal trascurare la pressione interna, e perciò forse molte esperienze vennero eseguite con rapido accrescimento delle goccie. È chiaro che avendo eliminato l'errore suddetto, sarebbe dannoso il correggerlo con un errore di segno contrario, e che è preferibile di avvicinarsi il più possibile alle condizioni teoriche rendendo l'accrescimento della goccia così lento che esso non abbia influenza sul peso di essa. In una prossima Nota potranno esser descritte le dispozioni più comode a tale scopo ed alcune esperienze non ancora completate.

Mineralogia. — *Il fahlerz nella miniera di Palmavexi* (Sardegna) [1]. Nota del dott. C. Rimatori, presentata dal Socio G. Strüver [2].

Sino a poco tempo fa la miniera dell'Argentiera della Nurra era ritenuta quale importante giacimento non solo di *galena* e di *blenda* principalmente, ma anche di *fahlerz*.

Evidentemente tutti quelli che asserivano la presenza di questo minerale in quella località, si saranno limitati ad una osservazione troppo superficiale di quei campioni, che da un esame più accurato e completo fatto dal prof. Lovisato [3] risultarono invece costituiti, alcuni da pura *galena* con speciale struttura finamente granulosa, altri da *bournonite*.

(1) Lavoro eseguito nel Museo di Mineralogia e Geologia della R. Università di Cagliari.

(2) Presentata nella seduta dell'8 novembre 1903.

(3) *La bournonite nella miniera dell'Argentiera della Nurra.* Rend. Acc. Lincei, 21 dicembre 1902.

Per l'identificazione di questa specie disgraziatamente compatta, mai cristallizzata per questa miniera, fu necessaria l'analisi quantitativa poichè i soli caratteri fisici, se permettevano di non confonderla col *fahlerz*, non erano però sufficienti per determinarne la sua vera natura; per tale motivo ho stimato sempre utili i dati analitici per evitare errori nel riconoscimento de' minerali ed in molti casi, come nel precedente, assolutamente necessarî.

Se la suddetta specie mineralogica è ora esclusa nei giacimenti dell'Argentiera della Nurra ed anche in quelli di Piccalina, delle miniere di Montevecchio, non manca però in altre località di Sardegna. Infatti nella stessa Nota del prof. Lovisato è fatta menzione di piccoli tetraedri di questa specie minerale, trovati dal Traverso a Baccu Arrodas nel Sarrabus e ricordati dall'Hintze ([1]) e più recentemente la si scopriva in campioni gentilmente regalati dal sig. ing. Carlo Floris Thorel al prof. Lovisato e provenienti dalla miniera di Palmavexi presso Iglesias.

Nella certezza di far cosa grata all'egregio ingegnere ed a quanti s'interessano degli studi mineralogici nella classica terra sarda, mi accinsi allo studio della detta specie minerale, anche qui purtroppo in massecole non presentanti mai faccie di cristalli. Lo stesso ingegnere, cui esterno qui a nome del prof. Lovisato e mio, la più viva riconoscenza per il prezioso dono, che ha permesso di affermare la *tetraedrite* per un'altra località isolana, ha voluto gentilmente inviare al prof. Lovisato anche alcune Note sulla stessa miniera di Palmavexi dalle quali mi permetto riportare alcuni periodi per intiero.

« . . . La detta miniera si trova a circa 5 chilometri da Iglesias in territorio della medesima città e vicina a quello di Fluminimaggiore. Il campo della sua Concessione fa parte della montagna del Marganai e giace sulla falda a sud di tal montagna e dal suo piede si eleva fino a Punta Martinedda ed a Punta S. Michele (Santu Miali) ove si trovano gli avanzi di una chiesa o convento che sorgeva in quella sommità.

« La maggior parte del detto campo è costituito dal calcare così detto metallifero, che comprende diversi generi che si alternano; così si trova il calcare bianco, il bleu, e, per riguardo alla sua costituzione, si trova il più o meno quarzoso, il più o meno dolomitico, e così si hanno tutti i calcari che si trovano nell'Iglesiente e che, come già indicai, sono compresi col nome di calcare metallifero. . . . .

« Alla parte inferiore comprende anche una parte di calcoschisti e di scisti, e così nel campo della Concessione si ha il contatto fra calcari e scisti, calcari e calcoschisti, scisti e calcoscisti ».

L'egregio ingegnere, dopo avere accennato ai lavori antichi eseguiti in quella Concessione, ed a coloro che la coltivarono prima che fosse venduta

([1]) Handbuch der Mineralogie (Siebente Lieferung, 1902, p. 1101).

alla Società Rio Ollastu, che ha sede in Parigi, passa alla descrizione delle ricerche fatte da questa Società, nelle colonne di minerale di piombo e zinco, scoperte da precedenti coltivatori della miniera nelle località *Coloru* e *Fossa Arrubia*, così continuando:

« La Società Rio Ollastu continuò le ricerche delle dette colonne in profondità, e riconobbe che a Coloru la colonna rasentando le pareti di una gran caverna che si trovò in quella località, si estende in profondità sotto la stessa caverna; a Fossa Arrubia riconobbe che i carbonati di zinco penetravano in una gran massa di materiale ferruginoso in diverse parti della medesima, e l'esistenza di una colonna di minerale di piombo molto argentifero, che seguì in profondità per un'altezza di 60 metri, la mineralizzazione di tale colonna è andata sempre migliorando, ed il punto ove ora si lavora è assai promettente, per cui è da ritenersi che debba continuare a rendersi anche più ricca a maggiore profondità.

« La Società Rio Ollastu volle estendere le ricognizioni, e così ebbe a constatare, che, oltre agli indicati giacimenti nel campo della miniera, ve ne erano degli altri e fra questi un filone che percorre per tutta l'estensione del detto campo da levante a ponente e si fu in un lavoro che si eseguì su tale filone, nella località denominata *su Zinnibiri*, che si trovò il materiale, nel quale fu constatata l'esistenza del *fahlerz* con il minerale di piombo argentifero.

« L'indicato filone, che ha una direzione circa est-ovest pende a nord e si trova incassato nel calcare metallifero e pare concordante con la stratificazione dello stesso calcare; a me pare che sia un filone strato.

« Con i lavori fatti dalla Società può dirsi che venne riconosciuto solo superficialmente, perchè i ribassi intrapresi per riconoscerlo in profondità non arrivarono sotto i punti nei quali si riteneva di trovare il filone mineralizzato.

« Il filone si presenta con la potenza di parecchi metri ed il suo affioramento è ben determinato dalla dolomia, che l'accompagna in diversi punti; affiora col quarzo e con lo spato e con tali ganghe in diversi punti l'affioramento è mineralizzato con minerali di piombo e di zinco con i quali si trovano anche dei minerali di rame ».

Indi dopo aver parlato di alcuni lavori antichi, che dimostrano come la mineralizzazione saltuaria del filone sia costituita da colonne, così prosegue:

« È rimarchevole, che l'affioramento corrispondente alle dette colonne e masse era assai limitato in confronto all'estensione delle stesse masse, per cui è da ritenersi che in corrispondenza agli affioramenti mineralizzati, che nello stesso filone si sono trovati dalla Società ancora vergini, si abbiano a trovare delle masse di minerale, quali furono trovate e coltivate dagli antichi.

« I campioni di malachite fibrosa che io le feci avere provengono pure dallo stesso filone e si trovarono in una lente di carbonato di rame, che fu scoperta con i lavori di ricerca, che si eseguirono alquanto più ad ovest di

Sa Fossa (d)e su Ramini, che avrà avuto tal nome perchè ivi si sarà prodotto del minerale di rame.

« Nella località *su Zinnibiri* ove l'affioramento era mineralizzato con *galena*, ricca in argento, si fece un pozzo verticale per riconoscere, se la detta mineralizzazione andava in profondità, e siccome il filone era inclinato col detto pozzo, si attraversarono le diverse zone dello stesso filone, che è potente alcuni metri, e quando si arrivò verso il letto, si trovò il materiale, al quale appartengono i campioni, contenenti il *fahlerz* ».

Questo minerale si presenta in massecole, disseminate in un impasto di quarzo e calcite, il quale comprende anche moschette di *galena* e più raramente cristallini di *blenda*. Il colore è grigio d'acciaio scuro, la lucentezza nettamente metallica. La durezza non si è potuta determinare esattamente per le piccole dimensioni delle particelle della sostanza, e perchè essendo questa così intimamente mescolata al quarzo da apparire in alcuni punti come granulosa, dimostra una durezza superiore alla vera. Fragile polvere quasi nera.

All' infuori di questi pochi caratteri fisici, non è possibile osservare altro sulla sostanza in posto, nulla che accenni ad una forma qualsiasi, nè vi appare indizio alcuno di sfaldatura per quanto accuratamente si osservino le varie disseminazioni. Perciò solo l'analogia con altri campioni già noti poteva far sospettare della natura di esso, ma, essendo questi i primi esemplari che io vedeva di Sardegna, non poteva pronunciare alcun giudizio in proposito, anzi, a dire il vero, ero lontano dal supporre l'esistenza del *fahlerz*.

La separazione della sostanza fu eseguita dapprima meccanicamente in modo da escludere il più che era possibile la ganga; fu sottoposta quindi ad un lavaggio con acido acetico diluito per eliminare completamente la calcite ed infine purificata dal quarzo mediante sospensione in bromoformio.

Al cannello e di fronte agli acidi si comporta come segue:

Nel tubo chiuso non fonde, dà odore di solfo bruciato ed un sublimato bianco, sul carbone con la soda dà globulo rosso di rame ed aureola bianca, alla perla manifesta la colorazione del rame.

È solubile in acido cloridrico concentrato; dall'acido nitrico è intaccata formando una soluzione bluastra ed un residuo bianco di acido antimonico misto a fiocchi di solfo: questa soluzione nitrica dà un leggiero precipitato con acido cloridrico. Nella soluzione in quest'acido concentrato furono riscontrati i seguenti elementi: rame, antimonio, zinco, ferro, argento in piccola quantità e traccie di piombo. Essendo i primi due elementi in prevalenza, specialmente il rame, già fin dai risultati dell'analisi qualitativa si poteva prevedere la natura del minerale. Mancando però assolutamente i dati cristallografici fu necessaria anche l'analisi quantitativa, eseguita nel modo seguente:

Un dato peso di sostanza fu sciolta in acido cloridrico concentrato; se-

parato per filtrazione il leggiero residuo quarzoso non eliminato nel processo di purificazione, la soluzione dopo diluizione e non badando all'intorbidamento prodotto per questo fatto, fu sottoposta all'azione dell'idrogeno solforato. I solfuri furono a più riprese lavati con solfuro di sodio; nella parte insolubile si dosò il rame allo stato di ossido, e nella soluzione l'antimonio allo stato di ossido intermedio. In metà del liquido separato dai solfuri, si determinò il ferro volumetricamente, e nell'altra metà furono dosati il ferro e lo zinco insieme allo stato di ossidi. Per valutare l'argento fu adoperata la soluzione nitrica d'un altra porzione di sostanza, ed infine venne fatta la determinazione dello solfo fondendo una data quantità di minerale con una miscela di salnitro e carbonato sodico.

I valori ottenuti sono questi:

Densità a 21°, 6 = 4,62.

Composizione centesimale

S	23,56
Cu	43,06
Sb	23,66
Zn	6,29
Fe	1,14
Ag	1,64
Pb	tracce
	99,35

Trattasi adunque di un solfo antimoniuro di rame, cioè della *tetraedrite*.

Consultando le numerose analisi eseguite sulla tetraedrite [1], risulta che il nostro *fahlerz* è compreso fra quelle varietà più vicine per composizione alla sostanza tipica semplice ($4 Cu_2 S . Sb_2 S_3$). Le varietà dalle quali meno differisce, sono quelle di Mornshauseu (Sandmann), di Dillemburg (Rose), di Kapnik (Klaproth e Rose), di Prescott-Ariz (Genth) e quelle specialmente di Cornwall do-Lisckeard (Reuter). A causa però della grande variabilità di composizione di questo minerale, non è possibile fare alcuna considerazione anche superficiale.

[1] Hintze. *Handbuch der Mineralogie,* Siebente Lieferung, pp. 1114-1119.

Zoologia. — *Ulteriori studî sulla Filaria immitis, Leidy* (1). Nota preliminare del dott. G. Noè, presentata dal Socio B. Grassi (2).

Ho continuato nell'estate scorsa, e sto tuttora proseguendo, gli studî sopra la *Filaria immitis*, in particolar modo dal lato biologico.

Nella mia precedente Memoria: *Sul ciclo evolutivo della Filaria immitis* ecc. (3) avevo lasciato insolute alcune questioni, di importanza biologica non secondaria, tra cui l'esplicazione ampia e precisa del meccanismo di migrazione delle larve adulte dall'ospite intermedio all'ospite definitivo e l'essenza del fenomeno mirabile, per cui la *Filaria immitis* — e per ciò anche la *Filaria Bancrofti* — al termine della sua evoluzione larvale, si avvia direttamente al *labium* delle zanzare dalle quali è ospitata.

Quanto al primo punto, debbo innanzi tutto dichiarare, come le ultime ricerche confermino pienamente le mie precedenti, estesamente riportate nella Memoria citata, fornendo la dimostrazione inoppugnabile dell'ipotesi già da me emessa sulla deposizione frazionata dei nematodi sotto la cute del cane. Il fatto, riassunto brevemente, si compie nel seguente modo.

Le filarie, raccogliendosi nel *labium*, determinano, come è noto, la distensione della cuticola dorsale e l'obliterazione più o meno completa della doccia e contribuiscono perciò a produrre, insieme col piegamento dell'organo, la lacerazione della cuticola stessa, all'atto della puntura. Però, la fuoruscita dei nematodi non avviene d'un tratto e contemporaneamente, ma per gradi ed in numero che non ho mai riscontrato maggiore di uno per volta. Senza escludere a priori che essi possano abbandonare il *labium* a due a due, vedremo tra poco la ragione meccanica di un fatto così singolare. Per ora, mi interessa di porre in rilievo la cosa, la quale, così come è riepilogata, si compie sempre nel caso normale, ossia quando l'infezione dell'ospite intermedio consegue realmente lo scopo utile alla specie parassita, che sta appunto nella piena riuscita dell'atto migratorio.

Ciò lascia chiaramente comprendere che il caso opposto non è vantaggioso al parassita. E così è infatti.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia comparata della R. Università di Roma.

(2) Presentata nella seduta dell'8 novembre 1903.

(3) Ricerche fatte nel Laboratorio di Anatomia normale della R. Università di Roma ed in altri Laboratorî biologici, vol. VIII, fasc. 3 e 4, 1901. Vedi inoltre: B. Grassi e G. Noè, *Propagazione delle Filarie del sangue esclusivamenta per mezzo della puntura di peculiari zanzare*, 1a Nota preliminare, nei Rendiconti della R. Accad. dei Lincei, vol. IX, 2° sem., serie 5a, fasc. 5, anno 1900 — G. Noè, id. id, 2a Nota preliminare, Rend, R. Accad. dei Lincei, vol. IX, 2° sem, serie 5a, fasc. 12, anno 1900 — G. Noè, id. id., Rend. R. Accad. dei Lincei, vol. IX, 1° sem., Serie 5a, fasc. 8, anno 1901.

Quando il numero delle filarie nel *labium* è soverchio, questo, già al suo primo piegarsi, si fende lungo la parete dorsale e, per lo più, nella sua seconda metà. — In un solo caso, in cui l'accumulo dei nematodi era singolarmente considerevole, la lacerazione si è prodotta alla base. — Allora le larve prorompono ad un tratto e tutte insieme dalla lacerazione, venendo a cadere sulla superficie cutanea o su qualsiasi altra, sulla quale si effettui l'operazione. E qui, noi assistiamo ad un fenomeno facile a prevedersi e che io infatti avevo già intuito durante i miei studî precedenti, ossia alla morte delle filarie fuoruscite.

Le larve adulte di filaria non sono menomamente difese contro la siccità, e tale è appunto lo stato svantaggioso dell'ambiente nel quale vengono a trovarsi, nelle anzidette circostanze. Ben presto perciò si raggrinzano e disseccano. Ciò ho osservato tanto sulla pelle e sulle mucose del cane, quanto sulla pelle umana e sia in seguito alla fuoruscita spontanea delle larve, avvenuta per la puntura della zanzara, sia in seguito alla lacerazione del *labium*, provocata artificialmente sul posto, previa perforazione della cute mercè un ago di diametro abbastanza grosso.

Si domanderà ora se ciò che non avviene sulla pelle arida, possa invece compiersi sulla pelle bagnata, ovviando cioè all'inconveniente della siccità. Ed anche a questo posso con tutta sicurezza rispondere negativamente, in base ad esperienze fatte, anche in questo caso, sul cane e su me stesso.

Tutti questi esperimenti, dei quali ora non riferisco che i risultati, saranno estesamente descritti nella Nota definitiva che stenderò tra poco.

Mi ero proposto di vedere se, nelle circostanze surriferite, l'invasione dell'ospite potesse avvenire sulle mucose naturalmente umide e precisamente su quella del naso, ma non sono riuscito nell'intento, non ostante molte prove, per il motivo che alla puntura segue immediatamente la reazione dell'animale ed il leccamento della parte offesa, e, d'altra parte, legando strettamente il muso, la mucosa si inaridisce ben tosto, sia per l'aumentato calore, sia per la respirazione, divenuta più rapida.

Del resto, l'obiezione che potrebbe sollevarsi a questo riguardo, mi sembra possa rimuoversi facilmente, pensando appunto che una zanzara non riuscirà mai, per il medesimo motivo, a posarsi, o quanto meno a condurre innanzi l'operazione della puntura, appena l'abbia iniziata, su di una parte dell'organismo tanto sensibile.

Eliminata così la possibilità che la penetrazione nell'ospite avvenga attivamente per opera dello stesso parassita, facentesi strada per il foro praticato dalla zanzara, vediamo come essa si eseguisce realmente.

Dirò subito che il meccanismo è effettivamente quale è stato supposto da me, ne' miei studî precedenti, inducendolo da circostanze e da fatti svariati (vedi op. cit. pagg. 331 e 332). Le filarie, cioè, vengono trascinate dagli stiletti entro la ferita e quivi abbandonate; e siccome la zanzara non

può, durante questa operazione, succhiare sangue, così, alla prima, fa seguire una seconda puntura e così via di seguito, finchè non si sia sbarazzata degli incomodi ospiti; donde deriva una sorta di disseminazione dei parassiti sulla superficie del corpo.

Ma, si domanderà, come avviene che le filarie escano successivamente, ossia per gradi, e non contemporaneamente, posto che la causa determinante la loro emissione è la lacerazione della cuticola dorsale del *labium?* Qualche cosa ne avevo già detto nella mia precedente Memoria a pag. 328. Ora però sono in grado di rispondere con maggior sicurezza e precisione alla domanda, poichè sono riuscito più volte ad osservare il meccanismo naturale di uscita, producendo cioè, sotto la lente, tutti gli atti che precedono il succhiamento del sangue.

È necessario, all'uopo, mettere il dittero nell'impossibilità di muoversi. senza tuttavia ricorrere ad anestetici — i quali spesso influiscono anche sui nematodi — il che si ottiene, staccandogli le ali e le zampe; adagiarlo sul vetrino porta-oggetti, a contatto di una gocciola di soluzione fisiologica e tentar di provocare il ripiegamento del *labium* nel seguente modo: tenendo fermo il torace senza comprimerlo, il che si può fare posponendo al dorso semplicemente una lancetta ed esercitando, all'estremità della proboscide, una dolce spinta in senso centripeto, mercè un oggetto delicato, incapace di lacerare, quale sarebbe ad esempio un rotolino di carta bibula, imbevuta pure di soluzione fisiologica, od un pennellino. L'operazione non è difficile ad eseguirsi, con un po' di esercizio.

Ove si riesca nell'intento, si assiste ad un fatto, che, per esser ben compreso, ha duopo di alcune spiegazioni preliminari.

Oltre alla curvatura che si produce, e perdura durante la succhiatura del sangue, verso la metà della proboscide (vedi fig. *a*) colla concavità rivolta verso gli stiletti, se ne effettua un'altra, in senso inverso, all'estremità, nel punto ove l'*oliva* si articola al *labium*.

L'*oliva*, come ognuno sa, è costituita di due metà, *semiolive*, articolantesi al *labium*. Tra queste, giace la *linguetta*, la quale va restringendosi ed assottigliandosi verso l'estremità.

Essa continua appunto il piano superiore ed inferiore del *labium*, i quali convergono all'estremità e dorsalmente è pure foggiata a doccia, non altrimenti di questo. Si noti, che essa non è articolata al *labium*, come lo sono le due *semiolive*. In posizione di riposo, essa giace nel vano lasciato da queste ed accoglie nella sua docciatura l'estremità del mazzo degli stiletti, il quale è fiancheggiato e, per grande parte, coperto dalle *semiolive*.

Quando la zanzara punge, gli stiletti abbandonano la loro sede normale nella doccia labiale (o per meglio dire questa si scosta da quelli), ma non quella che occupano in riposo nella regione dell'oliva; il che può avvenire appunto in grazia dell'articolazione tra le *semiolive* ed il *labium*; per questo

motivo, al luogo dell'articolazione si forma una curvatura in senso opposto alla mediana, ossia a concavità ventrale.

Orbene, la linguetta, durante la puntura, si comporta divesamente dalle semiolive, poichè la sua cuticola dorsale si curva soltanto in virtù della sua

Fig. *a*.

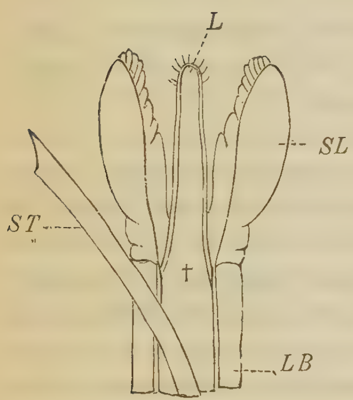

Fig. *b*.

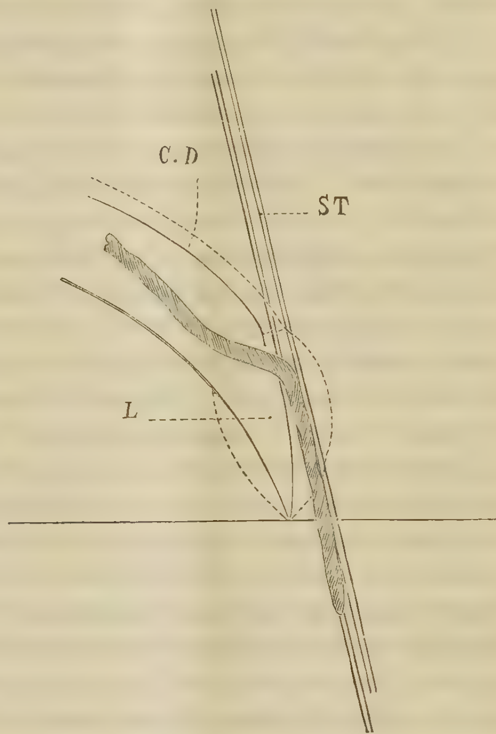

Fig. *c*.

La fig. *a*, tolta dalla mia Memoria precedente, rappresenta un'*Anopheles* in atto di succhiare.

La fig. *b*, tolta da Ficalbi, rappresenta l'estremità della proboscide, veduta dorsalmente. Le varie parti sono scostate un poco tra di loro per rendere più evidenti i rapporti. LB: *Labium* colla doccia dorsale; St: uno degli *Stiletti* spostato dalla doccia; Sl: *Semioliva* articolantesi col labium; L: *Linguetta*. La crocetta indica il luogo ove si produce la lacerazione della cuticola.

La fig. *c* è una ricostruzione schematica del meccanismo di inoculazione delle Filarie. L: *Linguetta*; St: mazzo degli *Stiletti*; Cd: *Cuticola* della *doccia*. La sezione longitudinale si immagina praticata secondo il piano mediano.

La linea tratteggiata rappresenta i contorni, prima, del margine della doccia, poi, della semioliva di sinistra; questi contorni giacciono, naturalmente, in un piano più profondo di quello corrispondente alla sezione longitudinale.

Debbo avvertire che, per necessità di dimostrazione, ho dovuto esagerare lo spazio che giace tra il piano cuticolare dorsale ed il piano cuticolare ventrale della linguetta e tener l'estremità di questa lontana dal mazzo degli stiletti, mentre la sua cuticola dorsale, nell'atto della puntura è effettivamente, in totalità, a contatto cogli stiletti che vi scivolano sopra.

flessibilità; così avviene che questa, per essere molto delicata e sottoposta a grande tensione, — occupa infatti il lato convesso della piega e riceve i colpi dei nematodi, spinti all'estremità dalla grande piega del *labium*, avanzantesi dalla base — si lacera molto facilmente, ogniqualvolta si eseguisca l'operazione descritta dianzi. Ed è appunto per questa apertura, sempre molto piccola, che escono le filarie, aiutandosi anche coi propri movimenti.

Il punto della lacerazione corrisponde alla crocetta segnata nella fig. *b*; una volta sola mi fu dato di riscontrarla più in basso. Si può affermare, però, con sicurezza che normalmente non si produca mai al disopra.

L'uscita dei nematodi avviene isolatamente; almeno, io non ho mai osservato che si verifichi in numero maggiore. Il nematode, appena affacciato all'apertura, si imbatte nel mazzo degli stiletti, che scivola sulla linguetta, si attacca a questo e vien perciò trascinato nella ferita.

Quest' ultima fase dell'operazione è stata da me chiaramente constatata nell'esperienza testè descritta e si verificava ogni qual volta agivo in secco; lasciando cadere sul preparato una gocciola di soluzione fisiologica, la filaria, naturalmente, si distacca; operando invece addirittura nel liquido, le filarie si liberano senza attaccarsi agli stiletti.

Conservando il *labium* in posizione di puntura, le filarie escono dal foro successivamente, a poca distanza l'una dall'altra; ma la fuoruscita cessa ove il *labium* si raddrizzi. Nel riposo, evidentemente, la pressione interna diminuisce e la cuticola della linguetta, rilasciandosi, chiude la piccola apertura; si aggiunga che, in questa posizione, il mazzo degli stiletti si appoggia, gravando, sulla ferita e che le semiolive ritornando in posizione normale, rinserrano l' una contro l' altra la linguetta ed il mazzo degli stiletti. È per questo motivo che, nelle mie precedenti esperienze, fatte premendo sul vetrino coprioggetto, le filarie schizzavano fuori innanzi al punto indicato nella fig. *c*, e quando l'eliminazione loro avveniva nella regione dell'oliva, era localizzata sempre all' estrema punta delle due metà di essa.

In sostanza, le mie recenti esperienze, mentre confermano ciò che ho pubblicato nella precedente Memoria, quanto al meccanismo fondamentale di migrazione passiva delle larve, ne precisano meglio tutti gli atti [1], almeno nella successione normale dei fatti che accompagnano lo sviluppo di questo nematode.

[1] Osservo che, di tutti coloro i quali si sono occupati delle Filarie ematiche, chi si è più avvicinato alla verità, quanto al meccanismo di uscita messo ora in luce da me, è stato il Dutton, nel Journal of Tropical Medicine del 15 Agosto, (n. 16, vol. IV), 1901. Egli, per altro, è nel vero soltanto quando suppone che la lacerazione si produca verso l'estremità della proboscide, poichè la spiegazione che egli dà del meccanismo è affatto priva di fondamento. Il punto di minor resistenza esiste, è vero, ma in corrispondenza alla cuticola *dorsale* della linguetta non al punto da lui indicato; sorpassato il quale, le filarie si troverebbero sempre rinchiuse nella cavità della linguetta stessa.

Di più, posso affermare:

I. Che il passaggio dall'uno all'altro ospite ha luogo soltanto allorchè la lacerazione si produce nella regione indicata, là dove gli stiletti urtano contro la cuticola.

II. Che ogni qual volta la lacerazione si produce altrove, i nematodi, versati fuori d'un tratto ed in grande copia, vanno irremissibilmente perduti.

La prima condizione si verifica quando il numero dei nematodi non è soverchio (8-10 all'incirca). Che se esso è troppo elevato, il *labium*, sottoposto a grande turgore, si fende al suo primo piegarsi, come si è veduto. Ciò accade quando la maturazione delle larve e la conseguente invasione del *labium* incominciano subito dopo un pasto, nel quale caso il tempo intercedente tra questo e il successivo è abbastanza lungo (36-48 ore, Grassi) da permettere a quelle di accumularsi nel *labium* in grande numero.

Questo fatto assume vero carattere di coefficiente di limitazione, da aggiungersi a quello, già così sorprendente, della elevata percentuale di morti tra gli *Anopheles* infetti ai primi ed agli ultimi stadi ed all'altro della dispersione delle larve adulte in ospiti inopportuni. Ricordo, a proposito di questo fattore di limitazione, recentemente venuto alla luce e che deve agire molto potentemente, i casi numerosi occorsimi ne' miei studii precedenti, nei quali l'infezione è mancata, non ostante che i cani fossero stati punti da zanzare infettate appositamente in laboratorio (vedi op. cit. Parte sperimentale). Il fatto mi aveva molto preoccupato ed era rimasto senza spiegazione; ora possiamo con molta verosimiglianza ritenere che tali zanzare non abbiano potuto trasmettere l'infezione, causa il soverchio accumulo di nematodi nel *labium*, tanto più che è oltremodo facile che tale eventualità si verifichi in zanzare mantenute in cattività e lontane dal contatto cogli animali. Mi è accaduto di contare una volta trenta larve all'incirca, tra quelle contenute nel *labium*, ridotto ad un vero sacco cilindrico, nei palpi e nel capo; altre ve ne erano nel torace, le quali facevano ressa allo stretto passaggio del collo (porzione ristretta del protorace). È ovvio che l'eventualità in discorso dipende dall'entità dell'infezione contratta dalla zanzara.

Si comprende ora facilmente la ragione di un fatto, rimasto alquanto oscuro nella mia precedente Memoria.

Ho quivi rilevato (p. 335) come nei tuboli malpighiani gli stadii più avanzati si rinvengano quasi sempre verso l'estremità distale, mentre mano a mano che si risalgano questi organi, s'incontrino larve più arretrate nello sviluppo. Ciò anche in quei casi in cui l'infezione è contratta in una sola puntura. La causa della non contemporaneità dello sviluppo sta certamente nel disagio provocato dalla presenza di un numero abbondante di individui in uno spazio relativamente ristretto. Ma aggiungevo: « la ragione, poi, per cui anche in quei casi nei quali il numero dei parassiti è relativamente

piccolo, giungano in precedenza a completo sviluppo quelli giacenti alla estremità libera dei tubi malpighiani, non mi riesce ancora chiara ».

Ormai, dopo quanto ho detto sui pericoli derivanti alla specie parassita da un soverchio accumulo di filarie nel *labium*, la cosa è pienamente spiegata, se non nelle sue intime cause, nella sua relazione coi fatti successivi.

Passiamo al secondo punto.

La questione che mi sono proposta è la seguente:

Qual'è il determinismo del particolare spostamento delle larve adulte, le quali abbandonati i tubi malpighiani si avviano e si raccolgono inevitabilmente alle regioni poste più all'innanzi del corpo della zanzara? Questo fenomeno, che ha in sè qualche cosa di meraviglioso, ove lo si colleghi alla migrazione definitiva che sarà per compiersi, sta a rappresentare una semplice reazione del nematode ad uno stimolo che parta dall'ambiente, chimico o fisico esso sia, o l'atto di una volontà, che abbia recato seco dalla nascita un carattere di necessità, quale sarebbe quello di un istinto specifico (1)?

Veramente, mi era sorto il dubbio che nel primo, più che nel secondo punto, dovesse ricercarsi la ragione del fenomeno ed aveva supposto non fosse questo altro che un esempio di *geotropismo negativo*, così diffuso nel mondo animale. Il nematode, in questo caso, si sarebbe innalzato, in opposizione alla forza di gravità, che, data la disposizione ordinaria del corpo della zanzara, tenderebbe a farlo abbassare, ed elevandosi, avrebbe raggiunta la proboscide che occupa infatti la posizione più alta. Noto di passaggio, che devesi escludere ogni azione chemiotattica, e per la mancanza nel *labium* di organi particolari, capaci di esercitarla, e perchè è facilissimo riscontrare filarie nei palpi, oltrechè nel *labium*.

Gli esperimenti fatti al riguardo hanno però risposto negativamente a questa ipotesi, poichè, non ostante che io mantenessi dal nono giorno in poi — dal giorno, cioè, in cui, durante l'estate, le filarie compiono la muta e si accingono ad uscire — le zanzare in posizione orizzontale o che le appendessi, mercè un filo, col capo all'ingiù, i nematodi hanno sempre, ciò non ostante, raggiunta la loro sede ordinaria.

Si potrebbe tuttavia pensare che la causa anzidetta se non agisce attualmente sia però stata, in origine, il vero stimolo al movimento in quella data direzione e che abbia poi, colla continua ripetizione dell'atto, determinato un vero istinto speciale, incapace ormai di esplicarsi diversa-

(1) Grandissimo numero di parassiti offrirebbero materia di studio a proposito dei loro istinti; si intende che le considerazioni che faccio in questo luogo si riferiscono soltanto alla *Filaria immitis*.

Nella Nota definitiva, di prossima pubblicazione, svilupperò meglio le idee qui espresse.

mente. Disgraziatamente, non posso venire al riguardo ad una conclusione decisiva, poichè l'esperienza ora descritta vien complicata e lo stimolo direttivo forse integrato da un'altra forza, ossia dalla corrente sanguigna dell'insetto, avviata appunto in senso inverso. Non è improbabile, anzi è molto verosimile che il nematode si avvii al capo in opposizione a questa corrente e, siccome tale stimolo agisce anche attualmente, così è facile comprendere come non possa definirsi con precisione la causa ricercata.

Tuttavia, non volendo cadere in una spiegazione teleologica, dobbiamo pur ammettere che la causa debba sussistere in una delle ipotesi accennate e forse anche nella coincidenza di tutte.

Fisiologia. — *Critica sperimentale delle ipotesi emesse per spiegare l'iperglobulia dell'alta montagna.* Nota II del dott. Carlo Foà, presentata dal Socio A. Mosso [1].

Alla ipotesi che i mutamenti del sangue sulle Alpi siano costituiti da una vera iperglobulia da neoformazione di corpuscoli rossi venne già fatta la seguente obbiezione: Come può una tale iperglobulia scomparire in un tempo tanto breve (36 ore e anche meno), quando l'individuo ritorna al piano, senza che si abbia emoglobinuria in causa di tanta distruzione di corpuscoli rossi?

Guidato da questo concetto intrapresi qualche ricerca per vedere se non fosse possibile di trovare nell'orina e negli organi di animali ritornati dall'alta montagna, le traccie di una forte distruzione di corpuscoli rossi.

A tale scopo feci la ricerca microchimica del ferro nel fegato, nella milza, e nel midollo delle ossa, e dosai l'urobilina dell'orina. Questa infatti si origina, secondo le vedute più accreditate, dai pigmenti ematici. Per evitare gli effetti della fatica avrei dovuto studiare l'orina degli animali che vennero portati in casse sul Monte Rosa, ma sarebbe stato troppo complicato il trasporto di gabbie adatte a raccogliere l'orina delle 24 ore, perciò studiai le orine emesse da me stesso sul Monte Rosa e nei giorni del ritorno al piano. Pur non avendo mantenuto un regime costante di alimentazione potei constatare che l'urobilina emessa nelle 24 ore è pressochè indipendente dalla qualità dei consueti cibi ingeriti.

Secondo le ricerche di Mac Menu e di Saillet, non esiste nell'orina normale urobilina, sibbene un cromogeno che si trasforma in urobilina per azione dell'aria e della luce. Perciò tutte le operazioni necessarie alla determinazione

[1] Lavoro eseguito nella quarta spedizione sul Monte Rosa diretta dal prof. A. Mosso.

quantitativa dell'urobilina vennero fatte all'aria ed alla luce. Per l'estrazione ed il dosamento usai il metodo di Méhu [1].

300 cmc. di orina fresca si acidificano con acido acetico e si saturano con solfato d'ammonio (circa 230 gr. di sale). Si versa la soluzione su filtro, si lava il recipiente in cui si è eseguita la saturazione e l'eccesso del sale rimasto indisciolto, con soluzione satura di solfato d'ammonio, che si butta pure sul filtro. Questo viene poi ancora lavato colla detta soluzione una o due volte e dopo averlo lasciato essicare lo si taglia a pezzetti e si mette in piccola quantità di alcool in un recipiente chiuso ermeticamente dove lo si lascia per 24 ore. Si toglie in seguito quest'alcool, e si lavano ripetutamente i pezzi del filtro con piccole quantità d'alcool, fino a che il liquido di lavatura filtrato non dia più allo spettroscopio la stria dell'urobilina. Si mescola insieme tutto l'alcool che ha servito alla lavatura e lo si porta a 100 cmc. Di quest'alcool che contiene l'urobilina da dosare si riempie una buretta analoga a quelle di Mohr suddivisa in decimi e centesimi di centimetro cubico. In una provetta si mettono 10 c^3. di alcool rettificato a 60 *perfettamente incoloro*, si aggiungono due goccie di ammoniaca liquida, e due goccie di una soluzione di cloruro di zinco all'uno su duemila. Si lascia cadere in questa provetta, goccia a goccia la soluzione alcoolica di urobilina contenuta nella buretta di Mohr fino a che si vede comparire una bella fluorescenza verde. La reazione è molto sensibile, però è bene ripetere un'altra volta il dosaggio e fare la media dei centesimi di centimetro cubico che furono necessarî nei due casi a produrre la reazione. A questo punto bisogna riportarsi ad una soluzione nota, che si ottiene (secondo il Viglezio) sciogliendo un centigrammo di urobilina Merk in 100 c^3. di alcool. Con questa soluzione si ottiene la reazione quando si è lasciato cadere nella provetta 0,50 c^3. di soluzione. Chiamando x l'urobilina contenuta nei 300 c^3. di orina da esaminare, n il numero dei centesimi di c^3. dell'alcool contenente l'urobilina estratta dall'orina, che furono necessarî per produrre la reazione, si avrà:

$$x = \frac{1}{n} \times 50 \times 0{,}01$$

poichè 50 sono i centesimi di c^3. necessarî quando la soluzione contiene gr. 0,01 di urobilina, e siccome si sono adoperati 300 c^3. di urina, per aver la cifra $^0/_0$ di urobilina, la formula sarà:

$$x = \frac{\frac{1}{n} \times 50 \times 0{,}01}{3} \quad \text{e semplificando} \quad x = \frac{0{,}17}{n}$$

I risultati di quattro analisi eseguite a Silvaplana, di due praticate rispettivamente sull'orina emessa l'undicesimo e il dodicesimo giorno di permanenza sul Monte Rosa, e di 4 praticate sull'orina emessa nei primi quattro giorni dopo la discesa al piano, mi diedero i seguenti valori:

a Silvaplana	gr. 0,022	sul Monte Rosa	gr. 0,018	ad Alagna (dopo il ritorno)	gr. 0,018
	» 0,019		» 0,018		» 0,022
	» 0,020				» 0,019
	» 0,020				» 0,020

(1) Viglezio, Lo Sperimentale. XLV.

Da queste cifre appare come *il ritorno alla norma del sangue non sia accompagnato da distruzione di corpuscoli rossi, che si appalesi con urobilinuria.*

Occorre tuttavia ricordare alcune ricerche di Worm-Müller (1), ed altre di Quincke (2) le quali dimostrarono che il ritorno del sangue alla norma dopo una trasfusione non è accompagnato da aumento di urobilina o di pigmenti biliari nell'urina, nè tanto meno da ittero.

Eppure in questo caso avviene certo una distruzione di corpuscoli, ed il Quincke la potè constatare facendo la reazione microchimica del ferro negli organi (fegato, milza, midollo).

Pensai perciò di fare lo stesso esame sugli organi degli animali il cui sangue era tornato alla norma dopo 36 ore dalla discesa al piano, ed usai un metodo simile a quello usato dal Quincke.

Fissare gli organi in una miscela di due parti di alcool e una di glicerina. Trattare le sezioni con ferrocianuro potassico al 5-10 %, poi rimuovere l'eccesso in acqua e trattare con HCl 0,5-1 % per qualche minuto (3).

Esaminai con questo metodo il midollo delle ossa, la milza ed il fegato e *non mi fu dato mai di trovare in questi organi una quantità di pigmento che desse la reazione del ferro, superiore a quella che esista normalmente.*

Questo reperto ha una conferma nelle ricerche di Abderhalden, il quale trovò che il ferro dei tessuti di animali ritornati dall'alta montagna, non è in quantità maggiore del normale.

Resta dunque anche per questa via confermato che *il sangue ridiventa normale senza che abbia luogo una abnorme distruzione di globuli rossi.*

Fra coloro che si occuparono dell'argomento che stiamo trattando, vi hanno taluni autori che attribuiscono ad un puro errore nella tecnica del conteggio, il reperto dell'iperglobulia dell'alta montagna. Così Gottstein, Meissen e Schroeder sostengono che la camera di Thoma-Zeiss è influenzabile dalla depressione barometrica, che in causa di questa lo spazio occupato dalla goccia di sangue aumenta di volume e che per questo solo fatto si conta sull'alta montagna un maggior numero di corpuscoli. A questa asserzione fecero giuste obbiezioni Meyer, Turban e Abderhalden, secondo i quali l'apparecchio di Thoma-Zeiss non è punto influenzato dalla depressione barometrica. Infatti è chiaro che se il preparato vien fatto sul luogo stesso ove lo si esamina la pressione che si trova al disotto del vetrino coprioggetti e quella che lo sovrasta

(1) Transfusion und Pletora. Christiania, 1875.
(2) Deutsch. Arch. f. Klin. Med. Bd. 33, p. 22.
(3) Sheridan-Delépine, Proceed. of the Physiol. Society. 1891, n. IV.

sono identiche, perciò la camera non può mutar di volume. D'altra parte è noto come molti ricercatori trovarono l'iperglobulia in animali tenuti a lungo sotto la campana pneumatica, eseguendo il preparato di sangue nel laboratorio stesso ove la pressione barometrica non era certo molto bassa. Sopra una tale questione mi pare non occorra spendere altre parole.

Un'altra teoria che venne emessa per spiegare l'iperglobulia dell'alta montagna è quella sostenuta dal Grawitz. Questi crede che l'organismo a grandi altezze in causa della rarefazione e della maggiore siccità dell'aria, perda forti quantità di vapor d'acqua, che questa perdita valga ad ispessire il sangue a tal punto che nell'unità di volume vi si trovi un maggior numero di globuli rossi. A questa teoria già venne obbiettato dal Zuntz che per dare un aumento del 20 % di globuli rossi, il sangue dovrebbe perdere tant'acqua, da portare ad una diminuzione forte nel peso del corpo. Invece Zuntz, Mosso, Egger, Wolff, Veraguth, ed io stesso non trovammo in nessun individuo una tale perdita di peso, ed anzi in taluno un considerevole aumento. A questo devesi aggiungere che Schrötter e Zuntz (1) trovarono in due ascensioni aereostatiche, che la quantità di vapor d'acqua perspirato da loro stessi a grandi altezze è minore che non in pianura.

Ed ancora devesi ricordare che Schaumann e Rosenqvist poterono constatare l'iperglobulia in animali tenuti sotto la campana in ambiente umidissimo.

Per consiglio del prof. A. Mosso intrapresi qualche ricerca per studiare se la perdita di peso che il corpo subisce in un certo tempo in causa dell'esalazione di vapor d'acqua per il respiro, fosse maggiore alla pressione ordinaria o nell'aria rarefatta. Usai per queste esperienze una bilancia colla quale già il Mosso aveva dimostrato che un uomo adulto perde circa un grammo di peso al minuto per il vapor d'acqua che espira.

Dopo essermi pesato su questa bilancia, io stavo tranquillo senza parlare e senza muovermi troppo per un'ora, e poi mi ripesavo.

Per l'esperienza di confronto dopo la prima pesata mi mettevo nella grande camera pneumatica del laboratorio dove si riduceva la pressione fino a circa 460 mm. di Hg.; vi rimanevo un'ora, poi senza perder tempo mi ripesavo. Una prima esperienza dimostrò che mentre alla pressione ordinaria io perdevo in un'ora 60 grammi di peso, alla pressione di 460 mm. perdevo in 74′, 60 grammi di peso. In u'altra esperienza perdetti alla pressione ordinaria gr. 66 in un'ora e sotto la campana gr. 47 in ore 1,14′.

Da queste due esperienze risulta che *un uomo esala meno vapor d'acqua nell'aria rarefatta che non a pressione ordinaria.*

Volli studiare ancora quanto perdessi di peso in un dato tempo al Col

(1) Pflueger's Archiv. Bd. 92.

d'Olen e nella capanna Regina Margherita. In una prima esperienza trovai che in ore 1,54′ perdevo gr. 160, ed in una seconda in ore 1,50′ perdetti pure 160 grammi. La perdita in peso fu dunque un po' maggiore che non a Torino, ma debbo far notare che non avevo punto mantenuto un costante regime di acqua e che anzi il giorno prima delle esperienze durante l'ascensione avevo bevuto molta acqua e the. Malgrado queste cause d'errore si può asserire che *in alta montagna l'organismo non perde tanto vapor d'acqua da giustificare l' ipotesi che Grawitz invocò a spiegazione dell' iperglobulia.*

Nella Nota precedente dimostrai che l'iperglobulia non è che periferica e non si manifesta nel sangue dei grossi tronchi arteriosi. Questo risultato contrario a quanto trovarono Egger ed Abderhalden è concorde invece con quanto trovarono Ambard et Beaujard, Armand-Delille et Mayer, Calugareanu et Henry, e con quanto già avevano sospettato Meissen e Schroeder. A tale interpretazione dell' iperglobulia, il Van Voornveld obbiettò che se anomala fosse la distribuzione dei corpuscoli rossi ugualmente dovrebbe avvenire per i globuli bianchi. Io non posso che ripetere quanto già rispose l'Abderhalden a favore di un'altra ipotesi che più avanti tratteremo: che cioè non esistono conteggi accurati di globuli bianchi nei casi di iperglobulia, che tali conteggi non sono sempre attendibili data la poca esattezza del metodo, e che infine i leucociti hanno proprietà diverse dai corpuscoli rossi per il loro peso specifico, le dimensioni, la motilità, le azioni chemotattiche, ecc.

Le esperienze di Lapique et Mayer secondo le quali l'iperglobulia dell'alta montagna sarebbe dovuta al freddo, non hanno valore per i conteggi da me eseguiti. Le scimmie ad esempio erano state portate sul Monte Rosa in casse a doppia parete, nelle quali veniva mantenuta dell'acqua calda, e gli altri animali al momento dell'esame erano stati da qualche giorno nella capanna alla temperatura media di 11°. Gli animali, sui quali ho sperimentato, stavano tutto il giorno nella stanza tenuti al riparo dalla soverchia luce e dal freddo. Non si può quindi accettare l'ipotesi di Zuntz che la diversa distribuzione dei corpuscoli dipenda dall'eccitamento della luce e del freddo.

Certo questo non esclude che gli agenti atmosferici possano produrre cambiamenti momentanei nello stato dei vasi in modo da alterare le cifre dei conteggi; ma questo non è che un fenomeno accessorio. Perciò la spiegazione dell' iperglobulia va ricercata in altre cause. I dott. Colla e Zuccola [1] confermando un' ipotesi emessa dal prof. Bozzolo, dimostrarono nell'uomo che ogniqualvolta la pressione arteriosa per malattie o per artifizî

[1] Acad. Med. Torino 1902, 11 aprile.

medicamentosi o fisici viene a diminuire, si produce iperglobulia nel sangue estratto dal polpastrello del dito, ed il numero dei globuli diminuisce invece, non appena cresce la pressione arteriosa. In base a queste osservazioni gli autori conclusero che l'iperglobulia nei casi di diminuita pressione arteriosa, sia data da un deposito nei capillari periferici dei costituenti morfologici del sangue, ed emisero l' ipotesi che l' iperglobulia dell'alta montagna dipenda dalla stessa causa.

Lazarus contrariamente a quanto osservarono altri ricercatori avrebbe trovato che la pressione del sangue diminuisce nell'aria rarefatta; e durante la permanenza nella capanna Regina Margherita notammo ogniqualvolta praticavamo i salassi da grosse arterie, che il sangue ne usciva con impeto assai minore che non si noti abitualmente nelle esperienze di laboratorio. A queste osservazioni dobbiamo aggiungere il fatto già ricordato dal Mosso nel suo libro sulla *Fisiologia dell'uomo sulle Alpi* (p. 73), dove riferendo l'osservazione di Humboldt che aveva visto come in taluni individui in alta montagna sanguinavano le gengive, attribuisce questo fatto alla debolezza del cuore, ed alla circolazione periferica languente per cui il sangue ristagna nei vasi e la pelle assume un color livido. Come indice della diminuita pressione del sangue nell'aria rarefatta ricorderò ancora il polso dicroto rivelato dal Mosso nei vasi cerebrali.

Recenti esperienze del Camus [1] dimostrarono che la depressione barometrica non ha di per sè influenza alcuna sulla pressione del sangue se non intervengono prima gravi fenomeni nel respiro. Questa è appunto la condizione in cui si trovano i nostri animali sul Monte Rosa e in cui ci trovavamo noi stessi. Poichè in tutti il respiro ed il ritmo cardiaco avevano subìto modificazioni molto notevoli, e questo ci dà ragione della diminuzione della pressione sanguigna a cui ho accennato sopra.

Noi notammo i sintomi di una stasi periferica e di una notevole dilatazione vasale nelle orecchie dei conigli e delle cavie indipendenti affatto dagli agenti atmosferici (freddo, luce); e tali sintomi erano particolarmente evidenti nella cresta di due galletti che avevamo portato con noi. La cresta dei galli è un organo riccamente vascolarizzato, e dal colore che assume si può arguire lo stato dei suoi vasi. Ora: mentre a Torino la cresta era di un bel colore rosso vivo, e solo un po' più scura nelle punte, alla capanna Margherita invece essa era divenuta cianotica; e questa cianosi durò per tutto il tempo che i galletti rimasero lassù. Le punte erano divenute a tal punto cianotiche da far dubitare di un processo cangrenoso. Ma che tale colore fosse dovuto unicamente alla stasi del sangue, lo dimostra il fatto che spa-

[1] L. Camus, *L'influence des variations d'altitude sur la pression sanguigne.* Journal de Physiol. et Path. Générale, 15 Juillet, 1903.

ventando i galletti in modo da eccitarli vivamente, la cresta assumeva un bel color rosso, che dopo un quarto d'ora scompariva per lasciar luogo di nuovo al color bluastro.

Questa cianosi è essa un effetto della diminuita pressione arteriosa dovuta a debolezza dell'impulso cardiaco, od è un effetto diretto della depressione barometrica sui vasi superficiali della pelle?

La cresta dei galli diviene cianotica in pochi minuti quando l'animale venga posto sotto la campana pneumatica, e questo fatto potrebbe far credere che si trattasse di un effetto immediato sui nervi dei vasi superficiali. D'altra parte se si tien conto di tutti i suaccennati fenomeni riguardanti la pressione arteriosa, e sopratutto del fatto che nei galletti aumentando con lo spavento la forza dell' impulso cardiaco, scomparisce la cianosi della cresta, parrebbe di dover ammettere che la stasi periferica fosse non già primitiva, ma secondaria all'indebolimento dell'impulso cardiaco. Questa ipotesi sarebbe convalidata dal fatto che esiste anche nei visceri addominali e toracici una notevole stasi, la quale manifestandosi nei polmoni, pare sia la causa dei disturbi respiratorî che intervengono in alta montagna. Non credo tuttavia di poter risolvere la questione: il certo si è che l'*iperglobulia periferica dell'alta montagna, è dovuta al ristagno di sangue nei vasi superficiali dilatati, onde i corpuscoli rossi come gli elementi morfologici più pesanti circolano meno attivamente e si depositano nei capillari* (1).

Il Bunge spiegò l'iperglobulia dell'alta montagna come un effetto di un maggiore trasudamento di plasma dai capillari sanguigni, in seguito a vasocostrizione. Abderhalden confermò questa teoria dimostrando che il residuo secco del sangue e del siero sono aumentati. Contrario a questi reperti sono quelli di Schaumann e Rosenqvist, i quali trovarono diminuzione di residuo secco, e quelli di Egger che non lo trovò mutato. Dopo quanto ho detto sulla pressione del sangue, sullo stato dei vasi periferici, e sulla distribuzione anomala dei corpuscoli rossi, appariscono chiare le obbiezioni che si possono fare a questa teoria, e non mi dilungherò a discuterla. Quanto all'aumento del residuo secco del sangue e del siero, vennero fatte da altri durante la nostra spedizione delle ricerche di cui ancora non conosco i risultati. Nondimeno se anche esse confermeranno i dati di Abderhalden, non credo tuttavia che infirmino quanto ho detto finora.

L'aumento di pressione endocapillare a cui sarebbe dovuta la maggiore trasudazione di liquido dai vasi sanguigni, non dipende certo nel caso nostro

(1) L'iperglobulia da vizî del cuor destro avrebbe un significato un po' diverso dell'iperglobulia dell'alta montagna, perchè nel primo caso la stasi periferica è senza dubbio dovuta all'accresciuto ostacolo che s'oppone al riflusso del sangue dalla periferia verso il centro, onde cresce la pressione arteriosa; mentre l'iperglobulia dell'alta montagna accompagna come si è visto una diminuita pressione del sangue.

da una vasocostrizione, poichè vedemmo come esista al contrario una vasodilatazione. In questa vasodilatazione appunto, noi possiamo trovare la ragione dell'aumento di trasudazione dei capillari sanguigni, ed è opportuno ricordare come il Pugliese [1] provocando col taglio del bulbo un forte abbassamento della pressione arteriosa ed una notevole dilatazione dei capillari periferici, otteneva un aumento nel deflusso della linfa dal dotto toracico, ed attribuiva questa maggiore trasudazione di linfa al rallentare del circolo sanguigno per cui il sangue ristagna nei capillari dilatati e la pressione endocapillare aumenta. Altri ricercatori avevano già dimostrato che la paralisi vasomotoria provocata in un arto dal taglio di un nervo, aumenta lo scolo della linfa dall'arto stesso. Queste esperienze e quelle del Pugliese mi paiono assai opportune per ispiegare il meccanismo per cui nel sangue degli animali che vivono nell'aria rarefatta aumenti il residuo secco; ed anzi se si tien conto che i centri bulbari in alta montagna subiscono un certo grado di paralisi (respiro periodico, acceleramento del ritmo cardiaco), non parrà fuori di luogo il pensare che a questa debolezza dei centri bulbari siano dovute ad un tempo la vasodilatazione periferica e la diminuzione di pressione arteriosa, a cui seguono il ristagno del sangue nei capillari, il deposito e l'accumulo in essi dei globuli rossi, e la maggiore trasudazione.

Quest'ultima sarebbe quindi un fenomeno che accompagna l'iperglobulia e tende ad accrescela, ma non ne sarebbe la causa prima.

Nota. — Per economia di spazio non riporto la lunghissima lista dei lavori che trattano della questione di cui ci siamo occupati. Una rivista bibliografica quasi completa sull'argomento si può trovare nel lavoro di v. Voornveld (Pfluger's Archiv. Bd. 92).

[1] Volume in onore di P. Albertoni. Bologna 1901 e Arch. Ital. de Biol. XXXVIII.

DISSERTAZIONI ACCADEMICHE
delle Università di Giessen, Königsberg, Karlsruhe, Upsala, Friburg, Genève, Erlangen, Freiburg,

pervenute in dono all'Accademia, presentate nella seduta dell' 8 novembre 1903.

I. Giessen.

Andresen W. — Zur *Siderosis bulbi*, nebst Bericht über 38 Magnetoperationen. Giessen, 1903, 8°.

Aninger R. — Hofgüll in der Wetterau. Hundert Jahre der Entwickelung eines intensiven Betriebes. Giessen, 1903, 8°.

Bar H. — Zur Casuistik der Leber- u. Nieren-Cysten. Giessen, 1902, 8°.

Becker K. — Ueber die elektrochemische Darstellung der hydroschwefligen Säure. Giessen, 1903, 8°.

Bohn Ph. — Ueber angeborene und erworbene pathologische Pigmentierung am Bulbus. Giessen, 1902. 8°.

Borgard F. — Beitrag zur Messung der Arterienweite und Blutdrucks am lebenden Menschen. Giessen, 1903. 8°.

Bostroem E. — Traumaticismus und Parasitismus als Ursachen der Geschwülste. Programm. Giessen, 1902. 4°.

Brettel A. — Ueber Fremdkörper in den Luftwegen. Giessen, 1902. 8°.

Bruder R. — Beitrag zur Lehre von den Zwillingen. Giessen, 1903. 8°.

Buchinger O. — Ueber den Einfluss des Pepsins auf die elektrische Leitfähigkeit der Milch. Giessen, 1902. 8°.

Budde F. — Ein Fall von Orchidopexie nach Hahn. Giessen, 1902. 8°.

Doermer L. — Beiträge zur Kenntniss der Diabasgesteine aus dem Mitteldevon der Umgebung von Dillenburg. Stuttgart, 1902. 8°.

Donges R. — Zur Casuistik der Neuritis optica bei dem weiblichen Geschlecht. Giessen, 1903. 8°.

Ebstein E. — Beitrag zur Lehre von der Behandlung des Tetanus traumaticus mit dem Behring'schen Serum. Giessen, 1903. 8°.

Eschenauer R. — Ueber die Unfallverletzungen des Auges im landwirtschaftlichen Betrieb. Giessen, 1903. 8°.

Fauerbach H. — Untersuchungen über die Arthritis purulenta traumatica des Pferdes. Stuttgart, 1903. 8°.

Forssell F. — Ueber das Verhalten des Bleis als Anode in Natriumhydroxydlösungen und die Elektrolyse bleioxydhaltiger Natriumhydroxydlösungen. Giessen, 1902. 8°.

Gros O. — Bericht über 170 Fälle von Netzhautablösung. Giessen, 1903. 8°.

Gross F. — Untersuchungen über die Histologie des Insectenovariums. Jena, 1902. 8°.

Grüninger W. — Das System der Kegelschnitte mit drei festen Punkten und einer festen Tangente. Giessen, 1903. 8.

Haase O. — Zur Kenntnis der Schiff'schen Basen und die Akridine. Dresden, 1902. 8°.

Happe H. — Ueber Graviditas abdominalis beim Kaninchen. Wiesbaden, 1903. 8°.

Heineck Fr. — Die Diabase an der Bahnstrecke Hartenrod-Uebernthal bei Herborn. Stuttgart, 1903. 8°.

Hellmann A. — Die Bedeutung der Schilddrüse in der Nosologie nebst einem Falle von infantilem Myxoedem. Giessen, 1903, 8°.

Hemmann A. R. — Die Mischung von Fichte (Picea excelsa Lk.) und Kiefer (Pinus silvestris L.) in Deutschland. Köstritz, 1903. 8°.

Henius M. — Beiträge zur Arsenbehandlung der Chlorose. Giessen, 1902. 8°.

Herzberger W. — Ueber congenitale cystische Entartung des Pancreas. Giessen, 1902. 8°.

Heuerling R. — Ueber einige Halogenoxyazobenzole. Giessen, 1903. 8°.

Hillers J. — Ein Beitrag sur Kasuistik der embryonalen Glaskörperstränge (Arteria hyaloidea, Cloquet'scher Kanal), mit anatomischem Befund in einem Fall. Giessen, 1903. 8°.

Hofmann J. — Zur Lehre von den Geistesstörungen im Senium. Giessen, 1902. 8°.

Hövel W. — Zur Symptomatologie der tuberkulösen Erkrankungen des Gehirns und seiner Häute. Giessen, 1903. 8°.

Katz F. H. — Beiträge zur Elektrochemie der Thiosulfate. Giessen, 1903. 8°.

Kirsch W. — Zur Kenntnis des m-Azophenols. Giessen, 1903. 8°.

Klein H. — Ueber Cysten und cystenartige Bildungen der Konjunktiva. Giessen, 1903. 8°.

Kraus C. F. — Zur Kasuistik der Sehnervenleiden bei Schädelmissbildungen. Giessen, 1902. 8°.

Lamers A. — Ueber fünf operativ behandelte Fälle von Darmstenose in der Ileo-coecal-Gegend. Xanten, 1902. 8°.

Laubenheimer K. — Experimentelle Beiträge zur Veränderlichkeit der Agglutination bei Typhus, Giessen, 1903. 8°.

Lindner H. — Zur Kasuistik der temporären Resektion der äusseren Orbitalwand nach Krönlein, Giessen, 1902. 8°.

Luft G. — Zur Casuistik der traumatischen Ruptur des Herzens. Homberg a. d. Ohm, 1903. 8°.

Mann O. — Zur Kasuistik der irreponibeln Kniegelenksluxationen. Giessen, 1903. 8°.

Mayeda Uz. — Das Lidcarcinom. Hamburg und Leipzig, 1903. 8°.

Müller M. — Ueber das Wachstum und die Lebenstätigkeit von Bakterien sowie den Ablauf fermentativer Prozesse bei niederer Temperatur unter spezieller Berücksichtigung des Fleisches als Nahrungsmittel. München, 1903. 8°.

Nobbs E. A. — Ueber die Einwirkung von Kalidüngemitteln und Kalk auf die physikalischen Eigenschaften des Bodens. Giessen, 1902. 8°.

Ritter D. — Zur Kasuistik der Leberechinococcen mit Durchbruch in die Gallenwege. Giessen, 1902. 8°.

Rixon F. W. — Zur Kenntnis des elektrolytischen Verhaltens von phosphoriger Säure. Giessen, 1903. 8°.

Robinson Ph. E. — Der elektrische Widerstand loser Kontakte und seine Anwendung in der drahtlosen Telegraphie. Leipzig, 1903. 8°.

Rössle T. A. — Untersuchungen über das Verhalten der Leukocytenzahl im Pferdeblut (1. (2. Stuttgart, s. a. 8°.

Schäcker G. — Zur Kasuistik der Pankreashaemorrhagie und Fettgewebsnekrose. Giessen, 1902. 8°.

Schiffer W. — Kasuistischer Beitrag zur klinischen Diagnostik der Persistenz des Ductus arteriosus Botalli. Würzburg, 1903. 8°.

Schlemmer H. — Ueber die elektrochemische Reduktion einiger m-Nitrophenylthioharnstoffe. Giessen, 1903. 8°.

Schudt H. — Ueber die elektrochemische Reduktion einiger Nitrophenoläther. Giessen, 1902. 8°.

Schüller A. — Ueber den Einfluss von Silicium und Kohlenstoff auf den Schwefel im Eisen. Giessen, 1903, 8°.

Schwienhorst M. — Ein Beitrag zur Casuistik der Zungenaetinomykose. Giessen, 1903. 8°.

Seiler F. — Ueber das Verhalten der lymphatischen Apparate bei Ulcerationen im Darme des Schweines. Hannover, 1902. 8°.

Spilger L. — Flora Vegetation des Vogelsbergs. Giessen, 1903. 8°.

Sprenker Th. — Ueber die Beziehungen der Skrophulose zu den häufigsten Binde- und Hornhauterkrankungen des Kindesalters. Giessen, 1902. 8°.

Stade W. — Untersuchungen über das fettspaltende Ferment des Magens. Braunschweig, 1902. 8°.

Stammen H. W. — Vier Fälle von der Geisteskrankheiten bei Morbus Basedowii. Giessen, 1903. 8°.

Stohr E. — Untersuchung einiger Abweichungen vom Haber'schen Reduktionsschema für aromatische Mononitrokörper. Giessen, 1903. 8°.

Thümmel H. W — Anodisches Verhalten von Zinn, Antimon und Wismuth. Giessen, 1903. 8°.

Tiede Th. — Wann lassen sich die Erreger des Rotlaufs und der Geflügelcholera nach einer Hautimpfung in den inneren Organen von Mäusen nachweisen? Jena, 1902. 8°.

Wagner H. — Die Wasserscheide in Südamerika südlich von 40° s. Br. Giessen, 1903. 8°.

Wantia H. — Versuche über Pathogenese der Meningitis. Giessen, 1903. 8°.

Weber J. — Holzmassenermittelungen am stehenden Stamm auf Grund photographischer Aufnahmen etc. Giessen, 1902. 8°.

Wetz W. — Zur Statistik der Neuritis optica der in der Giessener Universitätsaugenklinik in den letzten 11 Jahren beobachteten Fälle ecc. Giessen, 1902. 8°.

Weyprecht R. — Elektrochemische Reduktion aromatischer Di- und Trinitrokörper. Giessen, 1902. 8°.

Wiese Th. — Das Vorkommen von oolithischem Roteisenstein im Wesergebirge bei Minden und seine Entstehung. Minden-Leipzig, 1903. 8°.

Wilner M. — Die künstlichen Düngemittel, ihr gegenwärtiger Verbrauch in Deutschland und die Bestrebungen zur Erweiterung ihrer Amvendung. Giessen, 1902. 8°.

Wirth O. — Beitrag zur Casuistik der Glaskörperblutungen bei Sclerose der Netzhautgefässe. Giessen, 1903. 8°.

Wissmann L. — Ueber Embolie der Carotis communis. Giessen, 1903. 8°.

Zillikens J. — Ueber Carcinome im jugendlichen Alter. Giessen. 1903. 8°.
Zürn J. — Vergleichend histologische Untersuchungen über Retina und die Area centralis Retinae der Haussäugethiere. Leipzig, 1902. 8°.

II. Königsberg.

Abramson. H. H. — Zur Pathologie der Deflexionslagen. Königsberg, 1903. 8°
Albrecht F. — Ein Beitrag zur pathologischen Anatomie der chronischen Skleritis. Königsberg, 1903. 8°.
Andruszat L. — Ueber inversio uteri bei Myom. Königsberg, 1903. 8°.
Bagger W. — Die Bedeutung gewisser physikalischer Eigenschaften des Bodens und bodenbildender Mineralien für die Pflanzenkultur. Königsberg, 1902. 8°.
Bladt O. — Die Arterien des menschlichen Kehlkopfes. Königsberg. 1903. 8°.
Boerschmann F. — Ueber die eitrige Entzündung der Nierenfettkapsel Paranephritis purulenta. Königesberg, 1903. 8°.
Bogdahn E. — Ueber Bromcitramalsäure. Danzig, 1903. 8°.
Borris W. — Zur Behandlung der knöchernen Hüftgelenksankylosen. Könisberg, 1903. 8°.
Braun G. — Ostpreussens Seen. Geographische Studien. Könisberg, 1903. 4°.
Caspary H. — Ueber Pityriasis rubra pilaris. Königsberg, 1903. 8°.
Dangschat B. — Beiträge zur Genese, Pathologie und Diagnose der Dermoidcysten und Teratome im Mediastinum anticum. Tübingen, 1903. 8°.
Dencks G. — Zur Statistik der Jodoformintoxication in ihren Allgemeinerscheinungen. Königsberg, 1903. 8°.
Elkes C. — Der Bau der Schilddrüse um die Zeit der Geburt. Königsberg, 1903. 8°.
Gähtgens W. — Ueber oropharyngeale Tumoren und ihre operative Behandlung. Königsberg, 1903. 8°.
Gareis H. — Ueber die Bildung von Hämolysinen im Serum mit Blut gefütterter Tiere. Königsberg, 1902. 8°.
Grisenberg K. — Das Knochenmark als Untergangsstätte roter Blutkörperchen. Königsberg, 1903. 8°.
Glogau Willy. — Chlorierung der Phenyl-Essigsäure. Königsberg, 1903. 8°.
Grimm O. — Ueber Dermatitis venenata. Königsberg, 1903. 8°.
Haase M. — Beiträge zur Kenntnis der Behenolsäure. Königsberg, 1903. 8°.
Hecht H. — F. E. Neumann's Methode zur Bestimmung der Wärmeleitungsfähigkeit schlecht leitender Körper in Kugel- und Würfelform und ihre Durchführung an Marmor, Glas, Sandstein, Gyps sowie Serpentin, Basalt, Schwefel, Steinkohle. Königsberg, 1903. 8°.
Hiller A. — Die Fossula vermiana des Hinterhauptsbeines (Fossa occipitalis mediana). Königsberg, 1902. 8°.

Hoehne F. — Ueber puerperale Mortalität und Morbidität in der Königl. Universitäts-Frauenklinik in Königsberg (1898-1903). Königsberg, 1903. 8°.

Isserlin M. M. — Beiträge zur Kenntnis der perniziösen Anämie unter besonderer Berücksichtigung der kernhaltigen Erythrocyten. Konigsberg, 1903. 8°.

Konopka W. — Experimentelle Beiträge zur Dampfdesinfektion. Königsberg, 1902. 8°.

Kratzer W. — Zur Kenntnis der Benzolsulfon-γ-amidobuttersäuren. Danzig, 1903. 8°.

Krause R. — Beiträge zur Kasuistik der sympathischen Ophthalmie. Königsberg, 1903. 8°.

Krüger H. — Ueber die Combination von Myom und Carcinom an demselben Uterus. Tilsit, 1903. 8°.

Kühnlein J. — Ueber Syphilis hereditaria. Königsberg, 1903. 8°.

Kutz R. — Beiträg zur Kasuistik der Enchondrome am Halse. Königsberg, 1902. 8°.

Landsberger M. — Ueber den Bacteriengehalt des Darmkanals und behauptete Bactericidie der Darmsäfte. Königsberg, 1903. 8°.

Laubschat H. — Ueber Krampfhusten bei Neurastenie. Königsberg, 1903, 8°.

Lautsch H. Ueber die Herkunft der Granulosazellen der Graaf' schen Follikel beim Hund und Menschen. Königsberg, 1902. 8°.

Leopold M. — Ueber die Einwirkung von Brom auf maleïnsaure Salze. Königsberg, 1903. 8°.

Lienau D. — Ueber den Einfluss der in den unteren Teilen der Halme von Cerealien enthaltenen Mineralstoffe auf die Lagerung des Getreides. Königsberg, 1903. 8°.

Lipp E. — Ein Beitrag zur akuten Osteomyelitis scapulae. Königsberg, 1902, 8°.

Luerssen A. — Beiträge zur Biologie des Influenzabacillus. Königsberg, 1903. 8°.

Meckbach E. — Beiträge zur Kenntnis der Citrabibrombrenzweinsäure und Brommesaconsäure. Königsberg, 1903. 8°.

Meirowski E. — Neue Untersuchungen über die Todtenstarre quergestreifter und glatter Muskeln. Königsberg, 1902. 8°.

Mohr L. — Ueber die Aetiologie der Blasenscheidenfistel. Königsberg, 1902. 8°.

Otte P. — Ein Fall von Thymustod. Königsberg, 1903. 8°.

Perlmann A. — Zur Anatomie des haemorrhagischen Glaukoms im myopischen Auge. Königsberg, 1903. 8°.

Rautenberg H. — Beiträge zur Kenntnis der Dermoidcysten im Mediastinum anticum. Königsberg, 1903. 8°.

Reichel F. — Ein Beitrag zur Lehre von den strichförmigen Dermatosen. Königsberg, 1903. 8°.

Reiner E. — Ueber die Operabilität der Uteruscarcinome in Ostpreussen. Königsberg, 1903. 8°.

Roeckner E. — Beiträge zur Kenntnis der Citraweinsäure. Königsberg, 1903. 8°.

Roeder W. — Ueber Diglycolhydroxamsäure und Diglycolbenzhydroxamsäure. Königsberg, 1903. 8°.

Rybka T. — Zur mercuriellen Behandlung der Lues. Königsberg, 1903. 8°.

Sambraus L. — Ueber die Einwirkung von Chlor auf salzsaures Dimethylanilin in wässriger Lösung, Königsberg, 1903. 8°.

Schablowski G. — Die Veränderungen des Knorpels bei tuberkulöser Gelenkentzündung und ein Fall von Gonitis syphilitica. Königsberg, 1902. 8°.

Schattaur F. — Beitrag zur Kenntnis der Mikrognathie. Königsberg, 1903. 8°.

Scheinberg M. — Ueber die Einwirkung von Chlor und Brom auf Benzoësäure. Königsberg, 1902. 8°.

Scholz H. — Beiträge zur Frage der Entstehung des Indicans im Tierkörper. Königsberg, 1903. 8°.

Schultz M. — Studien über den Einfluss von Nitriten auf die Keimung von Samen und auf das Wachstum von Pflanzen. Königsberg, 1903. 8°.

Schultz W. — Ueber Ovarienverpflanzung. Berlin, 1902. 8°.

Segalowitz A. A. — Ueber die Prognose der Ovariotomie. Bearbeitet an 300 Ovariotomien aus der königl. Universitäts-Frauenklinik (1897-1903). Königsberg, 1903. 8°.

Sturmhöfel O. — Ueber die Eminentia cruciata des Hinterhauptbeines. Königsberg, 1903. 8°.

Sussnitzki J. — Das Verhalten der Hühner gegen Cantharidin. Ein Beitrag zur Frage von der natürlichen Resistenz der Tiere gegen Gifte. Königsberg, 1903. 8°.

Warmbrunn D. Beiträge zur Kenntnis der Chlod- und Bromoxybehensäuren und ihrer Umsetzungsprodukte. Königsberg, 1903. 8°.

Wellmer J. — Ueber die Einwirkung von Chlor auf Salicylsäure. Königsberg, 1903. 8°.

Wetzel H. — Ueber Prognose und Therapie der Beckenendlagen unter Zugrundelegung von 500 Geburten in Beckenendlage. Königsberg, 1903. 8°.

Wolffheim H. — Ueber einen umfangreichen porencephalischen Defekt des Gehirns eines Kindes mit frischer Poliomyelitis anterior. Königsberg, 1902. 8°.

III. — Karlsruhe.

Broniatowski H. — Zur Kenntnis der Nitrierung des Acetylmetaamidoacetophenons. Karlsruhe, 1903.

Gallusser Hans. — Ein Beitrag zur Vorausberechnung der Kommutationsverhältnisse bei Gleichstrommaschinen und des Spannungsabfalls bei Wechselstromgeneratoren. Stuttgart, 1902. 8°.

Kahn M. — Der Uebergangswiderstand von Kohlenbürsten. Stuttgart, 1902. 8°.

Krieger A. — Ueber Abkömmlinge des 1. 5. Diamidoanthrachinons. Karlsruhe. 1903. 8°.

Sack M. — Ueber die Entstehung und Bedeutung von Natriumlegierungen bei der kathodischen Polarisation. Leipzig, 1903. 8°.

Witzeck R. — Ueber die Schwefelverbindungen im Leuchtgase. München, 1902. 8°.

IV. — Upsala.

Friberger R. — Om mätning af pupillens vidd. Upsala, 1903. 8°.

Hammarsten O. — Bidrag till Kännedomen om gallans kemiska beståndsdelar. Upsala, 1902. 8°.

Idem. — Om lefvern såsom blodbildande och blodrenande organ. Upsala. 1902. 8°.

Holm O. — Beiträge zur Kenntniss der Alcyonidengattung Spongodes Lesson. Jena, s. a. 8°.

Lagrergen S. — Ueber elektrische Energieausstrahlung. Stockholm, 1902. 8°.

Lisell E. — Om tryckets inflytande på det elektriska ledningsmotståndet hos metaller samt en ny metod att mäta höga tryck. Upsala, 1902. 8°.

Rosén K. D. P. — Studien und Messungen an einem Dreipendelapparate. Stockholm, 1903. 8°.

Rubin T. — Le réseau de la base suédoise au Spitzbergen. Stockholm, 1903. 4°.

Swenander G. — Studien über den Bau des Schlundes und des Magens der Vögel. Trondhjem, 1902. 8°.

Wahlgren A. — Om de singulära punkterna till differentialekvationer af första ordningen och andra graden. Upsala, 1903. 8°.

V. — Friburg (Suisse).

Buchmeyer C. — Contribution à l'étude de l'éther cétipique. Fribourg, 1903. 8°.

Delaporte L. G. — Essai philosophique sur les Géométries non-Euclidiennes. Paris, 1903. 8°.

Egger J. B. — Begriff der Gymnastik bei den alten Philosophen und Medizinern. Ihr Verhältnis zur Jatrik, Diätetik, Hygiene, Paidotribik und Athletik. s. l. et a. 8°. (Freiburg).

Gattlen J. — Die permanenten Magnete. Freiburg, 1902. 8°.

Goldman Zd. — Zur Kenntnis der Benzaldehyd-o-sulfosäure. Freiburg, 1903, 8°.

Gössmann G. — Vergleichende Studien über Ortho-Carbon und Ortho-Sulfosäuren des Benzaldehyds. Freiburg, 1903. 8°.

Gyr G. — Die Kondensation der Benzylcyanid-o-Carbonsäure mit Aldehyden. Freiburg, 1903, 8°.

Pampanini R. — Essai sur le Géographie botanique des Alpes et en particulier des Alpes sud-orientales. Fribourg, 1903. 8°.

Rajchert E. — Études sur les Duplocoumarines. Fribourg, 1902. 8°.

Sokolowski S. — Ueber Abkömmlinge des Diphenylmethanamidins. Freiburg, 1903. 8°.

Wirz J. — Die Getreideproduktion und Brotversorgung der Schweiz. Solothurn, 1902. 8°.

VI. — Genève.

Alexieff W. — Contribution à l'étude de l'opération césarienne chez des naines au-dessous d'un mètre. Genève, 1903. 8°.

Altchuler R. — Notice sur trois cas d'épilepsie tardive. Genève, 1902. 8°.

Arabian H. — Contribution à l'étude du massage du coeur dans la mort par le chloroforme. Genève, 1903. 8°.

Baezner C. — Transformations du Chlorure de Benzyle O. nitré en Dérivés acridiniques. Genève, 1903. 8°.

Bernoud A. — Sur une nouvelle méthode électrothermique pour mesurer la puissance moyenne des courants de haute fréquence. Genève, 1903. 8°.

Billeter O. — De l'action du Cyanate d'argent sur les Chlorures d'Acyles. Neuchatel, 1902. 8°.

Bogdan S. — Application des méthodes physico-chimiques à l'analyse des liquides physiologiques. Bucarest, 1902. 8°.

Delètra E. — Recherches sur la transformation des dérivés phénazimidés en carbazols. Genève, 1903. 8°.

Dima-Dimitroff. — Contribution à l'étude des sillons pathologiques des ongles. Genève, 1903. 8°.

Dunant M. — Contribution à l'étude de la Lecithine. Genève. 1902. 8°.

Dunant R. — L'Ignipuncture. Son emploi dans le traitement des tumeurs blanches. Genève, 1903. 8°.

Fitzenkam R. — Recherches sur les Oxyacridines. Genève, 1903. 8°.

Friedmann H. — Recherches sur l'acide trimellique. Genève, 1902. 8°.

Geiser W. — Ueber familiaere Geisteskrankheiten zur Beobachtung gelangt in den Jahren 1888-1903 in der Genf. Irrenanstalt « Bel-Air ». Genève, 1903. 8°.

Heberlein E. — Contributions à l'étude des Polysulfures. Genève, 1903. 8°.

Hergraenin B. — Étude anatomique des inflammations chroniques des séreuses et de leur effet sur les organes qu'elles recouvrent. Genève, 1903. 8°.

Humbert G. — De la Cyanose dans les maladies congénitales du poumon. Genève, 1903. 8°

Kikine L. — Sur quelques dérivés de la Flavinduline. Genève, 1903. 8°.

Koenig R. — Traitement chirurgical du cancer de l'utérus. Genève, 1903. 8°.

Korselt J. — Recherches sur la Dichlorsulfobenzide. Genève, 1903. 8°.

Krükova V. — Colpectomie dans le Prolapsus. Genève, 1903. 8°.

Kuvlieff D. S. — Contribution à l'étude des relations entre les maladies du nez et celles des yeux et plus spécialement de la myopie. Genève, 1903. 8°.

Lasserre A. — Des pseudo-rhumatismes tuberculeux. Étude critique. Genève, 1903. 8°.

Levinsohn S. — Méthode générale pour la préparation des acides oxynaphtoylbenzoïques et des oxynaphtacènes quinones correspondants. Genève, 1903. 8°.

Martz T. — Methylation des acides oxybenzoïques et synthèse de l'acide sinapique. Bale, 1903. 8°.

Mauthner F. — Oxydation des o-Diamines. Genève, 1903. 8°.

Meyer G. M. — Action des métaux sur des derivés iodés aromatiques. Genève, 1902. 8°.

Nicati A. — Le Cacodylate de Soude dans la Tuberculose pulmonaire. Genève, 1902. 8°.

Nutritziano G. — Recherches expérimentales sur le Dormiol et particulièrement sur son action cardiovasculaire. Genève, 1902. 8°.

Odier R. — La Rachicocaïnisetion. Recherches expérimentales sur l'amoeboïsme des cellules neurales, centrales et périphériques, sur l'influence de la cocaïne, du curare, de la strychnine et des courants induits. Genève, 1903. 8°.

Radike R. Die physikalisch-mechanische Behandlung von Herzkrankheiten. Genf, 1903. 8°.

Renard Th. — Mesures de tensions superficielles à l'air libre. Genève, 1902. 8°.

Rozenband M. — Étude sur les dérivés de l'Aminophénylnaphtacridine. Genève, 1903. 8°.

Schakhoff M. Contributions à la connaissance de la Tuberculose des organes génitaux de la femme. Genève, 1903. 8°.

Schapiro O. — Du traitement des agités et des gateux à Bel-Air. Genève, 1902. 8°.

Scherz H. — Ueber die therapeutische und prophylaktische Anwendung des Antitetanus-Serum am Genfer Kantonsspital. Chur, 1903. 8°.

Spiess C. — Recherches morphologiques, histologiques et physiologiques sur l'appareil de la sangsue. Genève, 1903. 8°.

Stern L. — Contribution à l'étude physiologique des contractions de l'uretère. Genève, 1903. 8°.

Thévenaz W. — Recherches sur l'acide 3. 6. dichloro-o-benzoylbenzoïque. Genève, 1902. 8°.

Tissot F. — Du Cytodiagnostic des pus chirurgicaux. Genève, 1903. 8°.

Trève Barber H. (*de*) — Étude sur un monstre humain péracéphale, acarde et apneume. Genève, 1903. 8°.

Tsiklinsky P. — Recherches sur le microbes thermophiles. Genève, 1903, 8°.

VII. — Erlangen.

Aichel O. — Ueber die Blasenmole. Erlangen, 1901. 8°.

Ammon F. — Beiträge zur Kenntnis der Speckstein- und Pseudophitbildung. Erlangen, 1902. 8°.

Becher E. — Zur Kenntnis des m- Tolimidazols. Dresden, 1902. 8°.

Bentler B. — Eine Dermoidcyste in der Gegend der kleinen Fontanelle. Erlangen, 1902. 8°.

Bickelmann A. — Ueber die angeborene Verschliessung des Mastdarms und Afters und die Missbildungen im Bereiche des innern und aüssern Dammes. Saarbrücken, 1902. 8°.

Blume E. — Ueber Phenyltolylisodithiobiazolon. Beiträge zur Kenntniss der Anlagerung von Jodalkyl an Thioketoverbindungen. Erlangen. 1902. 8°.

Braun O. — Ueber condensierte Milch und über Dauerpräparate von Milch im Allgemeinen. Berlin, 1902. 8°.

Braun R. — Beiträge zur Entwicklungsgeschichte der Cornea der Wirbeltiere. München, 1902. 8°.

Buchner F. — Neue Methode zur quantitativen Bestimmung der Abklingungsintensitäten phosphorescirender Körper. Erlangen, 1902. 8°.

Buck Ch. — Beiträge zur Kenntniss der Alkaloïde der Steppenraute (Peganum Harmala). Erlangen, 1903. 8°.

Dobrzynski I. — Der Irrtum im Beweggrunde bei letztwilligen Verfügungen unter Berücksichtigung seiner Besonderheiten. Berlin, 1903. 7°.

Düll E. — Ueber die Eklogite des Münchberger Gneissgebietes. München, 1902. 8°.

Eckstein E. — Der Begriff des Daseins bei Julius Bergmann. Erlangen, 1902, 8°.

Emrich R. — Ueber die Einwirkung von Dichloressigsäure auf Anilin. Erlangen, 1903. 8°.

Fauth A. — Beiträge zur Anatomie und Biologie der Früchte und Samen einiger einheimischer Wasser- und Sumpfpflanzen. Jena, 1903, 8°.

Fild H. — Die tektonischen Verhältnisse der Ehrenbürg bei Forchheim. Erlangen, 1903. 8°.

Fischer G. — Beiträge zur vergleichenden Anatomie des Blattes bei den Trifolieen. Erlangen, 1902. 8°.

Flury F. — Beiträge zur Kenntnis des Tellurs. Regensburg, 1903.

Forstreuter V. — Organisation der Kohlenindustrie und des Kohlenhandels in Deutschland. Berlin, 1902. 8°.

Frey R. — Ueber eine intramolekulare Umlagerung bei Semicarbaziden. Erlangen, 1903. 8°.

Frien W. — Ein Fall von einseitiger kongenitaler Cystenniere bei einem 2 1/2 jährigen Mädchen. Heilung durch Operation. Erlangen, 1903. 8°.

Fritzweiler E. — Synthese von Indazolderivaten. Leipzig, 1902. 8°.

Fuchs W. — Beitrag zur Kenntniss der Glutinpeptone. Erlangen, 1902. 8°.

Gareis W. — Ueber einige Derivate des Acetals. Bonn, 1902. 8°.

Giere E. — Ueber Verbindungen von Phenolen mit kohlensauren Alkalien. Schillingsfürst, 1903. 8°.

Graf P. — Ein Fall von Leberabszess nach fötider Bronchitis. Erlangen, 1902, 8°.

Haffner G. Ueber die innere Reibung von alkoholischen Lösungen. Fürth, 1903, 8°.

Hartmann M. — Ueber die Beziehungen von Erkrankungen des Zentralnervensystems zum Decubitus pharyngis. Erlangen, 1902. 8°.

Hellmuth K. — Kloake und Phallus der Schildkröten. Leipzig, 1902. 8°.

Helmreich C. — Ueber die spezifische Wärme von Flüssigkeitsgemischen und Lösungen. Erlangen, 1903. 8°.

Herbig E. — Geschichte u. wirtschaftliche Bedeutung der Rechtsverhältnisse des linksrheinischen Dachschieferberghaus. Halle, 1903. 8°.

Hess A. — Ueber die Beweglichkeit des abgeschnürten rechten Leberlappens bei Schnürleber. Erlangen, 1903. 8°.

Hess W. — Zur Kenntnis der Benzimidazole. Erlangen, 1903. 8°.

Hoffbauer G. — Ein Fall von Tumorbildung im 4. Ventrikel mit dem Symptomenkomplex eines Tumors in der Vierhügelgegend. Bamberg, 1902. 8°.

Hoffmeyer H. — Ein Fall von beweglichem parostalen Osteom des rechten Oberschenkels. Erlangen, 1903. 8°.

Kanter E. H. — Ueber Erdalkalisilikate. Erlangen, 1902. 8°.

Kless F. — Ueber einige Anydroverbindungen aus Aldehyden und primären Aminen. Erlangen, 1903. 8°.

Koch C. — Zur Kenntnis von colloidalem Selen und Tellur. Erlangen, 1903. 8°.

Kopp W. — Ueber Imidazole und Oxydationsprodukte von Ortho- Diaminen. Erlangen, 1903. 8°.

Krapf H. — Ueber stereoisomere Hydrazone der Dithiokohlensaeureester. Erlangen, 1902. 8°.

Krehbiel A. — Franz Joseph Hugi in seiner Bedeutung für die Erforschung der Gletscher. Ausbach, 1902. 8°.

Leich O. — Ein Fall von recidivirenden Schwangerschaftsniere. Erlangen, 1903. 8°.

Lessing W. — Ueber Wechselstrom-Entladungen. Erlangen, 1902. 8°.

Lindinger L. — Anatomische und biologische Untersuchungen der Podalyrieensamen. Jena, 1903. 8°.

Lindner G. — Die Abhängigkeit der specifischen Wärme fester Körper von Temperatur. Erlangen, 1903. 8°.

Martin A. — Ueber physikalisch-chemische und phisiologische Wirkungen einiger Alkaloide auf Zellen. Erlangen, 1903. 8°.

Merkel H. — Die Betheiligung der Gefässwand an der Organisation des Trombus mit besonderer Berücksichtigung des Endothels. Erlangen, 1903. 8°.

Meyer W. — Ueber die Constitution der beiden isomeren Mononitroorcine. Oxydationsprodukte von B- Amidoorcin. Erlangen, 1903. 8°.

Müller F. A. — Quantitative Untersuchungen über Absorption im Ultraviolett. Erlangen, 1903. 8°.

Müller J. — Ueber abgeheilte Lungentuberkulose. Rostoch, 1903, 8°.

Nachtigall G. — I. Ueber einige Reaktionen des Glutakonsäureesters. — II. Ueber die Konstitution des Mononitrosoorcins- Erlangen, 1903. 8°.

Nickles H. — Ein Fall von Dicephalus. Erlangen, 1903. 8°.

Ostermayer A. — Beiträge zur Kenntnis der Basalte des Hassgaus. Erlangen, 1903. 8°.

Otto V. — Ueber die Resorption von Jodalkalien, Natriumsalicylat, Chloralhydrat und Strychnin im Magen. Erlangen, 1902. 8°.

Pestalazzi L. — Beiträge zur chemischen Kenntnis des Wismut. I. Studien über die basischen Wismutnitrate. — II. Ueber Wismutseleniate und kritische Untersuchungen über die quantitative Bestimmung der Selensäure. München, 1902. 8°.

Pleuss R. — Verteilung eines gelösten Körpers zwischen den Komponenten eines Gemisches zweier Lösungsmittel. Braunschweig, 1902. 8°.

Pomayer C. — Kloake und Phallus der Vögel. Leipzig, 1902. 8°.

Popp J. — Jod, sein Vorkommen und seine Bestimmung in geringen Quantitäten. Ueber ein Oxydationsprodukt der Phenylhydrazinsulfosäure und dessen Verwendbarkeit als Indikator. Erlangen, 1903. 8°.

Recknagel G. W. — Ueber die Ausscheidung des Methylenblau durch den Harn. Erlangen, 1902. 8°.

Reichenburg W. — Ueber die Einwirkung von Diazobenzol auf Glutakonsäureester. Erlangen, 1902. 8°.

Reinhard F. — Zwei Fälle von sehr auffallender Difformität nach Osteomyelitis tibiae. Erlangen, 1903. 8°.
Reinhart A. — Beitrag zur Ossifikation der Trachealschleimhaut. Erlangen, 1903. 8°.
Ries Ch. — Das elektrische Verhalten des kristallinischen Selens gegen Wärme und Leicht. München, 1902. 8°.
Rosenplenter E. — Das Geoid. Berlin, 1900. 8°.
Roth G. — Ueber acutes Hautoedem. Bamberg, s. a. 8°.
Rubenbauer J. — Ueber Metallverbindungen von β-Diketonen und β-Diketonsäureestern. Kaiserslauten, 1902. 8°.
Sassmann A. — Ein Fall von Stieldrehung einer Parovarialcyste. Dresden, 1902. 8°.
Schierenberg F. — Ueber α-Nitrosoresorcinmonoäthyläther und seine Derivate und die Oxydation des Amidoorcinmonomethyläthers. Erlangen, 1902. 8°.
Schlick G. R. — Ueber die Behandlung des veralteten Dammrisses. Erlangen, 1903. 8°.
Schmelzle K. — Ueber das Wesen und die geographische Verbreitung der Maare. Strassburg, 1903. 8°.
Schmidt G. — Beiträge zur Kenntnis des Pararosanilins. Sulzbach, 1903. 8°.
Schmidt Ph. — Beiträge zur Kenntnis der basaltischen Gesteine der Gegend von Roth am Ostabhang der Rhön. Erlangen, 1902. 8°.
Schneider F. — Ueber das Verhalten der Kathodenstrahlen in elektrischen Feldern. Erlangen, 1903. 8°.
Schneider K. — Ueber das Schicksal von Gewebe in der Peritonealhöhle lebender Tiere. Erlangen, 1903. 8°.
Schridde H. — Ueber Metastasen in inneren Organen bei Plattenepithelkrebs der Haut. Erlangen, 1902. 8°.
Schulze H. — Ueber die stereoïsomeren symm. Dibenzoylaethylendicarbonsäureester und die stereoïsomeren symm. Dibenzoylaethylene. Erlangen. 1902. 8°.
Schütt E. — Allgemeine pharmakodynamische Wirkungen von Toxinen und Fermenten. Stuttgart, 1802. 4°.
Sommer W. — Ueber Osteomalacie. Unter Mitteilung eines Falles aus meiner Landpraxis in der fränkischen Schweiz. Erlangen, 1903. 8°.
Sprengel C. — Zur Kasuistik und operativen Behandlung der Aneurysmen der Extremitäten. Boitzsch, 1902. 8°.
Stoeckel W. — Die Cystoskopie in ihrer Bedeutung für den Gynäkologen (Teil I und II). Leipzig, 1903. 8°.
Streicher O. — Beiträge zur vergleichenden Anatomie der Vicieen. Jena, 1902. 8°.
Stubbe P. — Ein Fall einer eigenartigen Herzverletzung. Erlangen, 1902. 8°.

Unterhössel P. — Kloake und Phallus der Saurier und Ophidier. Leipzig, 1902. 8°.

Wagner B. — Ueber einige Derivate des Amido-Resorcins. Breslau, 1902. 8°.

Walter H. — Soll man im Stadium der Panophthalmie eunukleieren? Erlangen, 1903. 8°.

Walther H. — Ueber die isomeren Thiosemicarbazide. Erlangen, 1902. 8°.

Weidert F. — Ueber den Einfluss der Kohlensäure auf die Magenverdauung. Erlangen, 1903. 8°.

Weissflog E. W. — Faserverlauf der Muskulatur des Magens von Pferd, Schwein, Hund und Katze. Berlin, 1902. 8°.

Wirth A. — Ueber zwei stereoisomere Oxime des Dypnon's. Erlangen, 1903. 8°.

Wolfrum Moritz. — Beiträge zur Entwickelungsgeschichte der Cornea der Säuger. Wiesbaden, 1902. 8°.

Wurtzel R. — Die Fehlerquellen des le Boulengé-Cronographen. Berlin, 1902. 8°.

Zeitelmann G. — Ueber die Einwirkung von Phenyl-i-cyanat auf organische Aminosäuren. Berlin, 1903. 8°.

VIII. — Freiburg (i. Br.).

Abraham B. — Ueber Lupuscarcinom. Freiburg, 1902. 8°.

Achert O. — Ueber schwefelhaltige Derivate des Benzyls und deren Zersetzungsprodukte bei der trockenen Destillation. Freiburg, 1903. 8°.

Agricola B. — Ueber traumatische Myositis ossificans. Freiburg, 1902. 8°.

Baum F. L. — Ueber die Blutgefäss-Naht. Greifswald, 1902. 8°.

Baum R. — Ein Beitrag zur Aetiologie und Statistik der primären Uvëitis. (Iritis, Irido-Cyclitis, Irido-Chorioiditis) nach dem Material der Freib. Universitäts-Augenklinik aus den Jahren 1890-1901. Freiburg, 1902. 8°.

Beer A. — Ueber plastische Deckung von Hautdefekten an den Gelenken. Freiburg, 1903, 8°.

Binoth F. — Ueber Sulfonal- und Trionalvergiftung. Freiburg, 1903. 8°.

Bistram A. von Freiherr. — Beiträge zur Kenntnis der Fauna des unteren Lias in der Val Solda. Freiburg, 1903. 8°.

Borchardt L. — Die Tuberkulose der Parotis. Freiburg, 1903. 8°.

Brandt L. — Beiträge zu den orbitalen Complicationen der Entzündung der Nebenhöhlen und ihrer Operation. Freiburg, 1902. 8°.

Bruhn C. — Ueber die Zersetzungsgeschwindigkeit der Brombernsteinsäure in wasseriger Lösung bei verschiedenen Temperaturen. Freiburg, 1902, 8°.

Brüning F. — Ueber das Auftreten des Fettes im Knochenmark in den ersten Lebensjahren.

Buttel-Reepen H. B. v. — Zur Kenntniss der Gruppe des Distomum-clavatum, insbesondere des Dist. ampullaceum und des Dist. siemersi. Jena, 1902. 8°.

Cahn A. — Pilzkonkremente (Streptotrichie) in den Tränenröhrchen. Freiburg, 1903. 8°.

Chajes B. — Die nervösen Störungen der Herztätigkeit. Freiburg, 1903. 8°.

Cimino H. — Ueber Pharynxcarcinom. Freiburg, 1903. 8°.

Citron J. B. — Kalkwasser und Kalkmilch als Desinfectionsmittel. Freiburg, 1902. 8°.

Cohen H. — Ein Fall von Pneumotomie. Preiburg, 1903. 8°.

Cohn L. — Ueber den strikturierenden tuberkulösen Coecaltumor. Duderstadt, 1902. 8°.

Cronbach E. — Die Beschäftigungsneurose der Telegraphisten. Berlin, 1903. 8°.

Davidsohn F. — Ein Beitrag zur Lehre vom Verschluss der Zentralarterie. Berlin, 1902. 8°.

Eichenbronner D. — Ein Beitrag zur Kenntnis des Keloids. Würzburg, 1902. 8°.

Emster K. van. — Ueber Matico-Oel. Freiburg, 1903. 8°.

End F. — Ueber den Wert der Drainage des Choledochus. Freiburg, 1902. 8°.

Finck A. — Die Jodometrie des Phosphors und seiner Säuren. Freiburg, 1902, 8°.

Fraenkel M. — Ein Fall von Eklampsie mit foetaler Missbildung. Berlin, 1903. 8°.

Frenkel B. B. — Meningitis in ihren verschiedenen Formen. Freiburg, 1902, 8°

Freund H. — Ueber die Fibromyome der Ligamente des Uterus. Freiburg, 1902, 8°.

Frischmuth P. — Ueber Abkömmlinge des v-m-Dibromjodbenzols und o-Jod-p-Methylchinolins mit mehrwertigem Jod. Freiburg, 1902, 8°.

Früchte W. — Ueber Kompilationen, insbesondere Netzhautablösung bei Hydrophthalmus nebst Beiträgen zu seiner Pathogenese. Freiburg, 1903, 8°.

Gabs H. — Ueber Kondensationsprodukte von Dinitrochlorbenzol mit Amidochinolinen. Freiburg, 1903 8°.

Gaugler K. — Synthesen mit disubstituierten Formamidinen. Freiburg, 1903, 8°.

Geldern M. — Ein Fall von Dysthyreosis unter Behandlung mit Schilddrüsenpräparaten. Freiburg, 1902, 8°.

Gerber E. — Die Summation von Muskelzuckungen bei Zeit- und Momentanreizen. Freiburg, 1903, 8°.

Gerlach V. — Beiträge zur Lehre von der Verdauung des Eiweisses und des Leimes. Wiesbaden, 1903, 8°.

Gollinger E. — Ueber Darmverschluss durch Gallensteine. Freiburg 1903 8°.
Graepel H. — Zwei Fälle von strikturierendem tuberkulösen Coecaltumor. Freiburg, 1903. 8°.
Graf E. — Zur Kenntnis der Metastasenbildung bei Carcinomen. Nürnberg, 1903. 8°.
Guenther K. — Ueber den Nucleolus im reifenden Echinodermenei und seine Bedeutung. Jena, 1903, 8°.
Haenisch G. — Zur Casuistik der Bleigicht. Freiburg, 1903, 8°.
Hammer W. — Ueber Thymuserkrankungen und Thymustod. Berlin 1903, 8°.
Hartmann A. — Zur Kasuistik der Oesophagotomie nebst einingen Bemerkungen über die Bedeutung der Oesophagoskopie und Durchleuchtung mit Röntgenstrahlen bei verschluckten Fremdkörpern. Freiburg 1902 8°.
Hauer A. — Stoffwechsel-Untersuchung an einem Vegetarier (auf Stickstoff und Fett). Freiburg, 1903, 8°.
Hebting J. — Ueber Harnblasendivertikel mit besonderer Berücksichtigung ihrer Entstehung. Freiburg, 1903, 8°.
Heinrichsdorff C. — Ueber Fremdkörper-Darmverschluss. Freiburg, 1903, 8°.
Hemmerdinger K. — Ueber die Hernia inguinalis und Hydrocele muliebris. Freiburg, 1902, 8°.
Herz L. — Zur Kenntnis der Verkalkungen in Fibromyomen des Uterus. Freiburg, 1903, 8°.
Hesse E. — Ueber Osteoplastik am Unterschenkel. Freiburg, 1903, 8°.
Hildebrandt W. — Die erste Leberentwickelung beim Vogel. Wiesbaden, 1902, 8°.
Hoek H. — Geologische Untersuchungen im Plessurgebirge um Arosa. Freiburg. 1903. 8°.
Kachel M. — Untersuchungen über Polyarthritis chronica adhaesiva. Jena, 1903. 8°.
Kleinschmidt C. — Ueber einen Fall von centralem verknöcherten Enchondrom der Tibia. Gotha, 1902. 8°.
Krauss L. — Ueber Metalltitratineen mittelst Jodsäure. Freiburg, 1903. 8°.
Krüger M. — Beitrag zur Lehre von der mykotischen Endocarditis. Freiburg, 1903. 8°.
Lange O. — Ueber Volvulus (Volvulus des Dünndarms). Strassburg, 1902. 8°.
Lekisch A. — Ueber zwei Fälle von Ganglien der Kniegelenksgegend. Freiburg, 1902. 8°.
Lewino P. — Zur Kenntnis der Derivate des 2,3′-Dimetyl-4′-Jodazobenzols und des m-Bromjodenzols mit mehrwertigem Jod. Freiburg, 1903. 8°.
Lipschitz R. — Zur Kenntnis der Periostitis albuminosa. Berlin, 1902. 8°.
Löwe H. — Ueber die Einwirkung von Thiophenolen auf Clor-Nitrobenzole. Freiburg, 1903. 8°.
Mack O. — Ueber den muskulären Schiefhals. Karlsruhe, 1903. 8°.

Maier E. — Ueber cystische Degeneration der Uterusfibromyome. Freiburg, 1903. 8°.

Maier G. = Ein Beitrag zur Casuistik des männlichen Brustdrüsenkrebses. Freiburg, 1902. 8°.

Mayer K. — Histologische Untersuchungen über Miliaria crystallina. Freiburg, 1903. 8°.

Mayer O. — Ueber die Einwirkung von Kalkhydrat auf Rhamnose. Freiburg, 1903. 8°.

Meng O. — Ein Fall von « Meningocele spuria traumatica ». Colmar, 1902. 8°.

Merzweiler A. — Ueber die Verbreitung coxitischer Abscesse. Freiburg, 1903. 8°.

Müller G. — Beitrag zur Beteiligung des Auges an der Pseudoleukämie (pseudleukämischer Sehnerventumor). Freiburg, 1903. 8°.

Naegell H. — Ueber Meta- und Para-Saccharin. Freiburg, 1902. 8°.

Neumann G. — Ueber die plastische Deckung der Augenhöhle, besonders die Kuster'sche Methode. Freiburg, 1902. 8°.

Pertz A. — Die Diagnose chirurgischer Erkrankungen vermittelst der Röntgenstrhalen. Freiburg, 1902. 8°.

Petrunkewitsch A. — Das Schicksal der Richtungskörper im Drohnenei. Jena, 1902. 8°.

Pflimlin. P. — Ueber die Funktionsstörungen des Hörorgans im Greisenalter. Klinische und statistische Untersuchungen. Mülhausen, 1903. 8°.

Phail Smith G. M. — Zur Kenntnis der Derivate des p-Jodazobenzols und des m-Chlorjodbenzols mit mehrwertigem Jod. Freiburg, 1903. 8°.

Pinczower E. — Ueber thermoelektrische Hysteresis, Thermoelectricität von Kupfer-Zinklegirungen. Berlin, 1902. 8°.

Ramsperger K. — Zur Kenntnis des sog. Endothelioms der Pleura. Freiburg, 1903. 8°.

Rieger E. — Ueber einen Fall von Carcinom der Kniegelenksgegend. Freiburg, 1902. 8°.

Rienhoff. F. — Ueber Riesenzellensarkome der weiblichen Brustorüse. Freiburg, 1903. 8°.

Ritsema J. C. — Beiträge zur Kenntnis des Akridins. Freiburg, 1903. 8°.

Rosset W. — Ueber eine Fall von tuberkulosem Magengeschwür mit besonderer Berücksichtigung der Genese. Freiburg, 1903. 8°.

Rudolf P. — Ueber die Einwirkung aromatischer Aminbasen auf aliphatische Disulfochloride. Freiburg, 1902. 8°.

Salomon W. — Ein Beitrag zur solitären Tuberkulose der Chorioidea. Freiburg, 1902. 8°.

Schenck F. — Ein Fall von posthemiplezischer Epilepsie und Abdominaltyphus. Freiburg, 1902. 8°.

Schiedt. — Die Jodometrie von Ferrocyaniden, Rhodaniden und Xanthogenaten. Stuttgart, 1902. 8°.

Schiler H. — Ueber die Resultate der palliativen und operativen Behandlung der Genitaltuberkulose beim Weibe. Freiburg, 1903. 8°.

Schottelius A. — Ueber Tenonitis bei Aderhautsarkomen nebst einem Beitrag von streifenförmiger Harnhauttrübung. Freiburg, 1903. 8°.

Schottelius E. — Ueber Sommationserscheinungen bei Zeitreizen. Freiburg, 1903. 8°.

Schultze W. — Ueber Knochen und Gelenkveränderungen bei Syringomyelie. Freiburg, 1903. 8°.

Schumacher G. — Zur Kenntnis der malignen Chorionepitheliome. Freiburg, 1903. 8°.

Schwantes E. — Ueber Ringsysteme mit mehreren Azinringen. Freiburg, 1903. 8°.

Schwarzstein L. — Ueber einen Fall von Lymphangioma cysticum des Bruchsackes. Berlin, 1902. 8°.

Schweissinger J. — Ueber Digitogensäure und ihre Abbauprodukte. Freiburg, 1903. 8°.

Schwoerer B. — Ueber subcutane Verletzungen des Kniestreckapparates. Freiburg, 1902. 8°.

Sellentin L. — Ueber einen Fall ven Magencarcinom mit Metastaben im Darm und Peritoneum unter besonderer Berücksichtigung der Verbreitungsart des Krebses. Freiburg, 1902. 8°.

Sievert H. — Ueber degenerative Veränderungen der Chorioidea und Retina bei Luxation der Linse in den Glaskörper, nebst einem Beitrag von glashäutiger Neubildung auf der Iris. Freiburg, 1903. 8°.

Silbermann K. — Zur Kenntnis des p-Tolylaldehydes. Freiburg, 1903. 8°.

Sinz A. — Ein Fall von Osteomyelitis albuminosa. Freiburg, 1903. 8°.

Sobernheim W. — Ein Beitrag zur Kenntnis des pulsierenden Exophthalmus und Enophthalmus. Freiburg, 1903. 8°.

Spiess H. — Ueber die Jodometrie von Gold und Platin. Freiburg, 1902. 8°.

Stegmann C. S. — Ueber einen Fall von primärem Nierencarcinom mit pyaemieartigem Fieberverlauf und Geschwulstthrombose. Freiburg, 1902. 2°.

Stern A. — Die Unbeweglichkeit des Steigbügels im ovalen Fenster. Wiesbaden, 1903. 8°.

Stern E. — Ueber die Aetiologie und Lokalisation der Sehnenscheidentuberkulose. Freiburg, 1903. 8°.

Stolle K. — Zur Kenntnis der Derivate des Acridius und Anthrachinons. Freiburg, 1903. 8°.

Walter P. — Beitrag zur operativen Behandlung der kongenitalen Hüftgelenksluxation. 1903. 8°.

Weisenhorn F. — Acut circumscriptes Hautoedem und Urticaria. Freiburg, 1902. 8°.

Wendt F. — 2 Fälle von Parotistumoren. Freiburg, 1902. 8°.
Werner E. — Beiträge zur Kenntnis des kohlensauren Kalkes. Freiburg, 1903. 8°.
Wiedersheim W. — Ueber den Einfluss der Belastung auf die Ausbildung von Holz- und Bastkörper bei Trauerbäumen. Leipzig, 1902, 8°.
Wild K. — Ortsbestimmung einer Kugel im Gehirn und ihre Extraktion. Constanz, 1902. 8°.
Wilkening W. — Ein Fall von Pulslosigkeit im Gebiet der oberen linken Extremität. Freiburg, 1902. 8°.
Will F. — Zur Kenntnis der Jodiniumverbindungen. Freiburg, 1902. 8°.
Windhaus A. — Ueber Cholesterin. Freiburg, 1903. 8°.
Zimmer M. — Ueber Metalltitrationen mittelst Chromsäure. Freiburg, 1902. 8°.

V. C.